GEOMETRÍA

1.- Se considera la recta $r:(x,y,z)=(t+1,2t,3t)$, el plano π: $x-2y-z=0$ y el punto $P(1,1,1)$. Se pide:

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo a π.

(0,9 puntos)

b) Determinar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

(1,2 puntos).

c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos π_1 y π_2

(1,2 puntos)

Comunidad Valenciana, junio 2004, ejercicio B.

SOLUCIÓN:

a) Plano paralelo a π: $x-2y-z+\lambda=0$

Como pasa por el punto (1, 1, 1) se verifica que $1-2.1-1+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2$

Plano buscado: $x-2y-z+2=0$

b) La recta r en paramétricas es : $\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$

Un punto de la recta es Q(1,0,0) y un vector $v=(1,2,3)$.

Además el plano pasa por el punto P(1,1,1)

Vector que une los dos puntos dados: $\overrightarrow{QP}=(0,1,1)$

Con los vectores v y $\overrightarrow{QP}$ y con el punto P formamos la ecuación del plano π_2:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2(x-1)+1(z-1)-3(x-1)-1(y-1)=0$$

Es decir, $2x-2+z-1-3x+3-y+1=0 \Rightarrow -x-y+z+1=0$

Plano buscado: $-x-y+z+1=0$

c) Con los dos planos obtenidos formamos un sistema: $\begin{cases} x-2y-z+2=0 \\ -x-y+z+1=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-z=2y-2 \\ -x+z=y-1 \end{cases} \Rightarrow 0=3y-3 \Rightarrow y=1$$

Si llevamos el valor de y a cualquiera de las ecuaciones del sistema obtenemos:

$x-2.1-z+2=0 \Rightarrow x=z$

Si hacemos $z=\lambda$ tenemos:

$\begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$ (Ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los dos planos)

2. - Dados los planos $\pi_1 : x+y+z=-5,\ \pi_2 : x-3y-z=3$ y la recta $r:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$, se pide:

a) Determinar razonadamente la posición de la recta r y resta s intersección de los planos π_1 y π_2. (1,7 puntos)

b) Obtener razonadamente la ecuación del plano que contiene a la recta s anterior y es paralelo a r. (1,6 puntos)

Comunidad Valenciana, junio 2004, ejercicio A.

SOLUCIÓN:

a) Intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\begin{cases} x+y+z=-5 \\ x-3y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=-5-y \\ x-z=3+3y \end{cases};$$ Sumando, $2x=-2+2y \Rightarrow x=-1+y$

Sustituimos en la primera ecuación del segundo sistema:

$-1+y+z=-5-y \Rightarrow z=-4-2y$

Haciendo $y=\lambda$, la recta s, intersección de los dos planos es la siguiente:

$$s:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-4-2\lambda \end{cases}$$

Un punto de r: $P(2,1,0)$. Un vector de r: $v=(2,3,2)$

Un punto de s: $Q(-1,0,-4)$. Un vector de s: $w=(1,1,-2)$

Vector $\overrightarrow{PQ}=(-3,-1,-4)$

Determinante formado por los vectores v, w y $\overrightarrow{PQ}$: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ las rectas se cruzan.

b) Plano que contiene a **s** y es paralelo a **r**:

Tomamos un punto de **s**, un vector de **s** y un vector de **r**:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z+4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x+1)-4y+3(z+4)-2(z+4)+6(x+1)-2y=0$$

$$8(x+1)-6y+(z+4)=0 \Rightarrow 8x+8-6y+z+4=0 \Rightarrow 8x-6y+z+12=0$$

3. Calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos de coordenadas $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,2,0)$. Determina la distancia del punto $(2,1,1)$ a dicho plano.

Extremadura, junio 2004.

SOLUCIÓN:

Para obtener la ecuación de un plano necesitados un punto y dos vectores:

$u = (1,0,0) - (0,1,1) = (1,-1,-1)$
$v = (1,0,0) - (1,2,0) = (0,-2,0)$

Elegimos uno de los puntos dados, por ejemplo, (1,0,0).

La ecuación del plano será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2z-(-2)(-1)(x-1)=0 \Rightarrow -2z-2x+2=0$$

Es decir, $x+z-1=0$

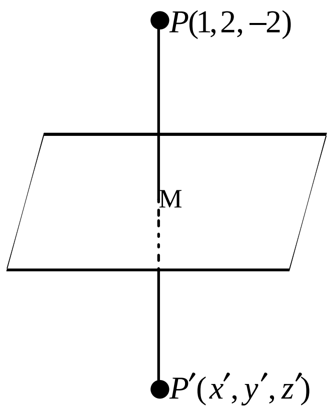
Distancia del punto (2,1,1) al plano obtenido:

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1.2+0.1+1.1-1|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

4. Halla las coordenadas del punto simétrico de $P(1,2,-2)$ respecto del plano de ecuación: $3x+2y+z-7=0$

Andalucía, junio 2004.

SOLUCIÓN:



Si la ecuación del plano es $3x+2y+z-7=0$, el vector característico del plano es $v=(3,2,1)$ y es vector director de la recta que pasa por los puntos P y P´; por tanto,

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{1} = \lambda$$

Y en paramétricas, $\begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = -2+\lambda \end{cases}$

La intersección de la recta obtenida y el plano nos da el punto P´:

$$3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)+(-2+\lambda)-7=0 \Rightarrow 3+9\lambda+4+4\lambda-2+\lambda-7=0$$

$$14\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{7}$$

Sustituyendo λ en la ecuación de la recta obtenemos las coordenadas del punto M:

$$x=1+3.\frac{1}{7}=\frac{10}{7}$$

$$y=2+2.\frac{1}{7}=\frac{16}{7}$$

$$z=-2+\frac{1}{7}=\frac{-13}{7}$$

Coordenadas del punto M: $\left(\frac{10}{7},\frac{16}{7},\frac{-13}{7}\right)$

Finalmente, aplicando la fórmula de las coordenadas del punto medio de un segmento obtenemos el punto buscado:

$$\frac{1+x'}{2}=\frac{10}{7}\Rightarrow x'+1=\frac{20}{7}\Rightarrow x'=\frac{13}{7}$$

$$\frac{2+y'}{2}=\frac{16}{7}\Rightarrow 2+y'=\frac{32}{7}\Rightarrow y'=\frac{18}{7}$$

$$\frac{-2+z'}{2}=\frac{-13}{7}\Rightarrow -2+z'=\frac{-26}{7}\Rightarrow z'=\frac{-12}{7}$$

Punto simétrico: $P'\left(\frac{13}{7},\frac{18}{7},\frac{-12}{7}\right)$

5. Considera el punto P(2,0,1) y la recta r: $\begin{cases} x+2y=6 \\ z=2 \end{cases}$

a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r.

b) [1,5 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Andalucía, junio 2005.

SOLUCIÓN:

Ponemos la recta en paramétricas haciendo y = t: $\begin{cases} x=6-2t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$

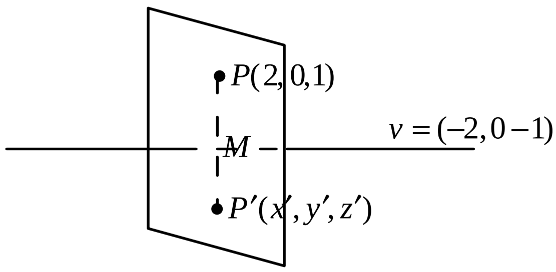
Un punto de la recta r es R(6,0,2) y un vector $v=(-2,1,0)$

Restando las coordenadas de los puntos P y R obtenemos un vector:

$w=(6,0,2)-(2,0,1)=(4,0,1)$

Con el punto P y los dos vectores obtenemos la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow x-2-4(z-1)+2y=0, \text{ es decir, } x+2y-4z+2=0$$



Plano perpendicular a r que pasa por P:

$-2x+y+\lambda=0$

$-2.2+1.0+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=4$, luego la ecuación del plano es: $-2x+y+4=0$

El punto de intersección de la recta r con el plano es M:

$$r:\begin{cases} x=6-2t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$$

$-2(6-2t)+t+4=0 \Rightarrow -12+4t+t+4=0 \Rightarrow t=\dfrac{8}{5}$ y entonces, $x=6-2.\dfrac{8}{5}=\dfrac{14}{5};$

$y=\dfrac{8}{5}; \quad z=2$

$M\left(\dfrac{14}{5},\dfrac{8}{5},2\right)$

Ahora aplicamos la fórmula de las coordenadas del punto medio de un segmento:

$$\frac{2+x'}{2}=\frac{14}{5} \Rightarrow x'=\frac{18}{5}$$

$$\frac{0+y'}{2}=\frac{8}{5} \Rightarrow y'=\frac{16}{5}$$

$$\frac{1+z'}{2}=2 \Rightarrow z'=3$$

Punto simétrico de P: $P'\left(\dfrac{18}{5},\dfrac{16}{5},3\right)$

6. a) ¿Están alineados los puntos A(1, 0, −1), B(−1, 1, 2) y C(3, 0, 1)? Justificar la respuesta.

b) En caso afirmativo, determinar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo, determinar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos.

Canarias, junio 2004

SOLUCIÓN:

a) Hallamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}=(-1,1,2)-(1,0,-1)=(-2,1,3)$

$\overrightarrow{AC}=(3,1,2)-(1,0,-1)=(2,0,2)$

Dichos vectores no son proporcionales, por tanto, no están alineados.

b) Como no están alineados, determinan un plano cuya ecuación se obtiene tomando uno de los puntos y los dos vectores obtenidos.
Si elegimos el punto $A(1,0,-1)$ resulta:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-1)+10y-2(z+1)=0 \Rightarrow x+5y-z-2=0$$

7. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x=2t \\ y=3+t \\ z=1-t \end{cases}$ **y al punto** $P(2,-1,2)$

Calcula la distancia desde el plano obtenido al punto $Q(0,1,0)$

Castilla La Mancha, junio 2005

SOLUCIÓN:
a) Un punto de la recta dada es: $R(0,3,1)$. Un vector de la recta: $v=(2,1,-1)$

Vector que une los puntos P y R: $\overrightarrow{PR}=(0,3,1)-(2,-1,2)=(2,-4,1)$

Con el punto P y los dos vectores obtenidos formamos la ecuación del plano.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x+4y+10z-22=0$$

b) Distancia del punto $Q(0,1,0)$ al plano obtenido:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3.0+4.1+10.0-22|}{\sqrt{3^2+4^2+10^2}}=\frac{18}{\sqrt{125}}=\frac{18}{5\sqrt{5}}=\frac{18\sqrt{5}}{25}$$

8. Dado el punto P(1, 3, −1), se pide:
a) **(1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos X(x, y, z) cuya distancia a P sea igual a 3.**

b) **(2 puntos) Calcular los puntos de la recta:** $\begin{cases} x=3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1-4\lambda \end{cases}$ **cuya distancia a P es igual a 3.**

Madrid, junio 2005

SOLUCIÓN:
a) La distancia entre los puntos P y X viene dada por la expresión:

$$d(P,X)=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}=3 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=3^2$$

Se trata de una esfera con centro en P(1, 3, −1) y radio 3.

b) Un punto genérico de la recta es: X(3λ, 1 + λ, 1 − 4λ)
Si se desea que d(X, P) = 3, tendremos:

$(3\lambda - 1)^2 + (1 + \lambda - 3)^2 + (1 - 4\lambda + 1)^2 = 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 16\lambda + 16\lambda^2 = 9$

$\Rightarrow\ 26\lambda^2 - 26\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 1.$

Los puntos serán: Q(0, 1, 1) y R(3, 2, −3).

9. Halla las coordenadas del punto intersección de la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$ y del plano 2x − y + z − 1 = 0.

La Rioja, junio 2005

SOLUCIÓN:
Las ecuaciones paramétricas de la recta dada son:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo el punto genérico de la recta en el plano obtenemos la intersección:

$2(1+\lambda) - 1 + (1-\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

Entonces,

$x = 1 + (-1) = 0$

$y = 1$

$z = 1 - (-1) = 2$

Punto de intersección: $P(0,1,2)$

10. Se consideran las rectas $r: \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

a) (1 punto). Halla la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.
b) (1 punto). Halla las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado a).

Madrid, septiembre 2005

SOLUCIÓN:

a) Expresamos las rectas dadas en paramétricas:
Recta r:
Si hacemos y = t, $x = 3 + t$

$z = 3 + 2t$

La recta r queda de la siguiente forma:

$$r:\begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = 3+2t \end{cases}$$ siendo $v = (1,1,2)$ un vector director de la misma.

En la recta s hacemos x = u

$y = -7+2u$

$z = -4+2u$

La recta s queda de la siguiente forma:

$$s:\begin{cases} x = u \\ y = -7+2u \\ z = -4+u \end{cases}$$, siendo $w = (1,2,1)$ un vector director de ella.

Si hallamos el producto vectorial de v y w, obtenemos un vector perpendicular a dichos vectores y, como consecuencia, perpendicular a las rectas r y s:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i+2j+2k-k-4i-j = -3i+j+k = (-3,1,1)$$

La recta que pasa por el origen y tiene a $(-3,1,1)$ como vector director será:

$\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$. O bien en paramétricas: $t:\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

b) Intersección de las rectas s y t: $\begin{cases} u = -3\lambda \\ -7+2u = \lambda \\ -4+u = \lambda \end{cases}$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$-7+2u = -4+u \Rightarrow u = 3$. Entonces $\lambda = -3$

El punto de corte de las rectas s y t es: $P(3,-1,-1)$

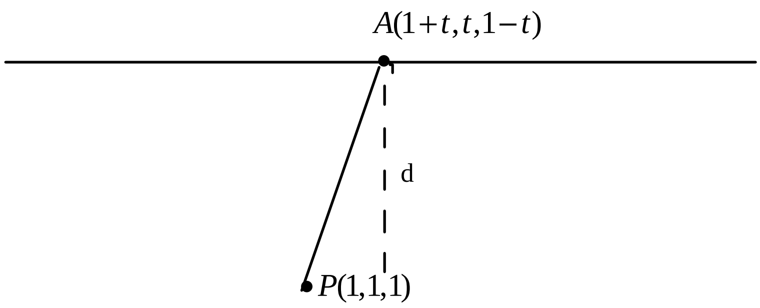
11. Encontrar la distancia del punto P = (1, 1, 1) a la recta $L = \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$

Murcia, junio 2005

SOLUCIÓN:

Existen varias formas de hallar la distancia de un punto a una recta.

Veamos una de ellas:



A es un punto genérico de la recta y $\overrightarrow{PA}$ es un vector variable. El que nos interesa es el que sea perpendicular a la recta. Entonces el producto escalar de $\overrightarrow{PA}=(t,t-1,-t)$ y $v=(1,1,-1)$ ha de ser nulo. Por tanto, $t.1+(t-1).1+(-t).(-1)=0 \Rightarrow t+t-1+t=0 \Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$

Entonces, $\overrightarrow{PA}=(1/3,-2/3,-1/3)$

El módulo de $\overrightarrow{PA}$ es la distancia que buscamos.

$$d=\sqrt{(1/3)^2+(-2/3)^2+(-1/3)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

12. Considera el plano π de ecuación $2x+y-z+2=0$ y la recta r de ecuación

$$\frac{x-5}{-2}=y=\frac{z-6}{m}$$

a) [1 punto]. Halla la posición relativa de r y de π según los valores de m.
b) [0,75 puntos]. Para m = –3, halla el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
c) [0,75 puntos]. Para m = –3, halla el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

Andalucía, junio 2006

SOLUCIÓN:

a) Ponemos la recta en paramétricas:

$$\frac{x-5}{-2}=y=\frac{z-6}{m} \Rightarrow \begin{cases} x=5-2t \\ y=t \\ z=6+mt \end{cases}$$

Sustituimos la recta en el plano y operamos:

$$2(5-2t)+t-(6+mt)+2=0 \Rightarrow 10-4t+t-6-mt+2=0 \;\Rightarrow\; 3t+mt=-4 \;\Rightarrow\; t=\frac{-4}{3+m}$$

Si $m\neq -3$, la recta corta al plano en punto.

Si $m=-3$, no hay solución. La recta es paralela al plano.

b) El plano pedido viene determinado por el punto (5, 0, 6), el vector $(-2,1,-3)$ y como es perpendicular a $2x+y-z+2=0$, por el vector $(2,1,-1)$

$$\begin{vmatrix} x-5 & y & z-6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-4y-2z+7=0$$

c) Si queremos que sea paralelo a $2x+y-z+2=0$ se ha de cumplir lo siguiente:

$2x+y-z+\lambda=0$

Y si contiene a la recta r el punto (5, 0, 6) pertenece también al plano, es decir,

$2.5+0-6+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-4$

Plano buscado: $2x+y-z-4=0$

13. Encuentra las coordenadas de los puntos de la recta de ecuación $(x,y,z)=(-1,1,1)+t(1,2,1)$ que están a distancia 1 del plano $2x+2y+z=5$

Cataluña, junio 2006

<u>SOLUCIÓN:</u>

Un punto genérico de la recta es P = (1 + t, 1 + 2t, 1 + t); la ecuación del plano es $\pi: 2x+2y+z-5=0$

Entonces, $d(P,\pi)=\dfrac{|2(-1+t)+2(1+2t)+1+t-5|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=1 \Rightarrow \dfrac{7t-4}{\pm 3}=1$ y de ahí se obtiene que $t=1;\ t=1/7$

Para t = 1, el punto es P1 = (0, 3, 2).

Para t = 1/7, será P2 = (6/7, 9/7, 8/7).

14. Estudia la posición relativa de las rectas *r* y *s* dadas por $r \equiv x=y=z, \quad s \equiv \begin{cases} x=t+1 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$

En particular, ¿son perpendiculares o paralelas?

La Rioja, junio 2006

<u>SOLUCIÓN:</u>

En primer lugar hallamos sus vectores de dirección:

$v=(1,1,1); \quad w=(1,1,1)$

Como dichos vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Tomamos un punto de la recta s: (1, 0, 0)

Lo sustituimos en la recta r: $1=0=0$ ¡absurdo!. No la verifica. Las rectas son paralelas.

15. Determina los puntos de la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x=0 \\ y-1=\dfrac{z-3}{2} \end{cases}$ que equidistan del plano π de ecuación $x+z=1$ y del plano π' de ecuación $y-z=3$

Septiembre 2006, opción A

SOLUCIÓN:

Pasamos la recta a paramétricas:

$$y-1=\frac{z-3}{2}=t \Rightarrow y=1+t;\ z=3+2t$$

$$r:\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=3+2t \end{cases}$$

Un punto genérico de r es $(0,1+t,3+2t)$. Como piden los puntos que equidistan de los planos π y π', tenemos que $d(P,\pi)=d(P,\pi')$

Plano π: $x+z=1;\ d(P,\pi)=\dfrac{|0+2t+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

Plano π': $y-z=3;\ \ d(P,\pi')=\dfrac{|t+1-2t-3-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

Igualando ambas expresiones y simplificando tenemos |2t+2| = |–t – 5|, de donde salen las ecuaciones $2t+2=-t-5$ y $2t+2=t+5$

De $2t+2=-t-5$ sale $t=-\dfrac{7}{3}$ y un punto es $P(0,-4/3,-5/3)$

De $2t+2=t+5$ sale $t=3$ y el otro punto es $P'(0,4,9)$

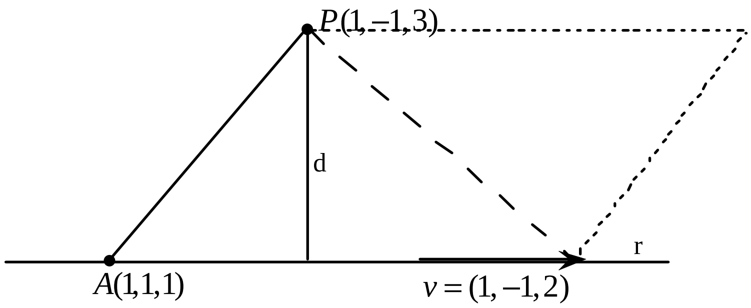
16. Calcule la distancia del punto P = (1, –1, 3) a la recta r. [2,5 puntos]

$$r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$$

Murcia, septiembre 2006

SOLUCIÓN:

Veamos otra forma diferente a la empleada en el ejercicio 11 para determinar la distancia de un punto a una recta:



$|\overrightarrow{AP}\times v|$ es el área del paralelogramo.

$\dfrac{|\overrightarrow{AP}\times v|}{2}$ es área del triángulo.

Por tanto, $\dfrac{|\overrightarrow{AP}\times v|}{2}=\dfrac{base\times altura}{2} \Rightarrow |\overrightarrow{AP}\times v|=base\times altura$

Como $base=|v|$ y la altura es d, obtenemos la siguiente fórmula para hallar la distancia de un punto a una recta: $d=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\times v|}{|v|}$

En el caso que nos ocupa, $A=(1,1,1)$, $P=(1,-1,3)$, $\overrightarrow{AP}=(0,-2,2)$, $v=(1,-1,2)$

$$\overrightarrow{AP}\times v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2i+2j+2k=(-2,2,2)$$

$$d=\frac{\sqrt{(-2)^2+2^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{12}{6}}=\sqrt{2}$$

17. Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos P (0, 1, 1) y Q (1, 0, 1) y es paralelo a la recta $r\equiv\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-1}{2}$

Navarra, junio 2006

SOLUCIÓN:

El plano pedido viene determinado por cualquiera de los dos puntos, el vector PQ y el vector director de la recta. Esto es, por: P = (0, 1, 1); PQ = (1, –1, 0) y = (1, 0, 2)

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -2x+1(z-1)-2(y-1)=0 \;\Rightarrow\; 2x+2y-z-1=0$$

18. a) Halla la ecuación del plano determinado por los puntos: A (1, 3, 2), B (2, 0, 1) y C (1, 4, 3).

b) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda - 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = 2\lambda \end{cases}$ **con respecto al plano anterior, hallando el punto de intersección en caso de que se corten.**

CANARIAS / JUNIO 06

SOLUCIÓN:

a) $\overrightarrow{AB} = (1,-3,-1);\ \overrightarrow{AC} = (0,1,1)$

Elegimos uno de los puntos, por ejemplo, el punto A(1, 3, 2)

La ecuación del plano pedido es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -3(x-1)+1(z-2)+1(x-1)-1(y-3)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ 2x+y-z-3=0$

b) Sustituimos las coordenadas de la recta en la ecuación del plano:

$$2(3\lambda-1)+(\lambda+2)-2\lambda-3=0 \Rightarrow 5\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda = 3/5$$

Por tanto, la recta y el plano se cortan cuando $\lambda = 3/5$; esto es, en el punto

$P(3.3/5-1, 3/5+2, 2-3/5)$, es decir, $P(4/5, 13/5, 6/5)$

19. En el espacio se consideran:

- **La recta r intersección de los planos de ecuaciones implícitas:**

$2x-2y-z=9\ \ y\ \ 4x-y+z=42$

- **Y la recta s que pasa por los puntos (1, 3, –4) y (3, –5, –2). Se pide:**

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta *r* (0,8 puntos) y de la recta *s* (0,3 puntos)

b) Justificar que las rectas *r* y *s* se cruzan (0,8 puntos).

c) Calcular un vector direccional de la recta *t*, perpendicular común a las rectas *r* y s, (0,4 puntos) y calcular el punto *P* de intersección de las rectas *s* y *t* (1 punto).

COMUNIDAD VALENCIANA / SEPTIEMBRE 06

SOLUCIÓN:

a) $\begin{cases} 2x-2y-z=9 \\ 4x-y+z=42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y-z=9-2x \\ -y+z=42-4x \end{cases} \Rightarrow -3y=51-6x \Rightarrow y=-17+2x$

En la segunda ecuación:

$4x-(-17+2x)+z=42 \Rightarrow z=25-2x$

Y haciendo $x=\lambda$ la recta r queda de la siguiente forma: $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-17+2\lambda \\ z=25-2\lambda \end{cases}$

Recta s que pasa por los puntos (1, 3, –4) y (3, –5, –2):

$v=(2,-8,2)$

$s:\begin{cases} x=1+2\mu \\ y=3-8\mu \\ z=-4+2\mu \end{cases}$

b) Un punto y un vector de la recta r es $P(0,-17,25);\quad v=(1,2,-2)$

Un punto y un vector de la recta s es $Q(1,3,-4);\quad w=(2,-8,2)$

Vector que une los puntos P y Q: $\overrightarrow{PQ}=(1,20,-29)$

Determinante de los $v,\ w$ y $\overrightarrow{PQ}$:

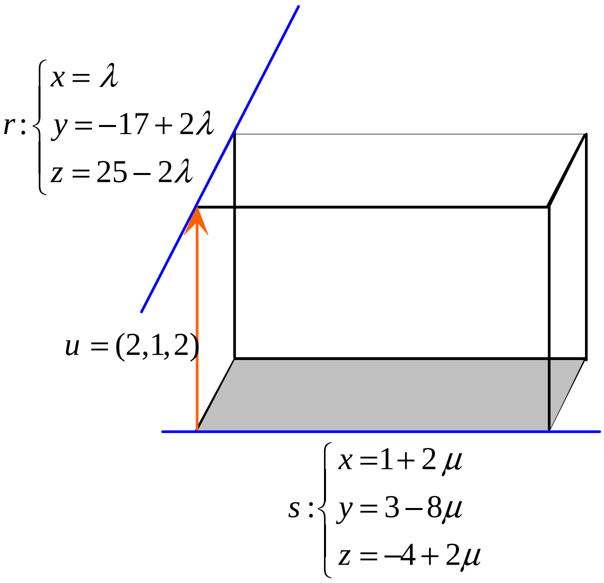
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 20 & -29 \end{vmatrix} = 232+4-80-16-40+116=216 \neq 0 \Rightarrow$ las rectas se cruzan.

c) Hallamos el producto vectorial de v y w:

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -8 & 2 \end{vmatrix} = -12i-6j-12k=(-12,-6,-12)$

El vector obtenido es perpendicular a las dos rectas. Pero en vez de tomar $(-12,-6,-12)$ podemos tomar $(2,1,2)$ que es proporcional a él.

Vector direccional de la recta t, perpendicular común a r y a s: $(2,1,2)$



Un vector genérico de la recta t perpendicular común a r y a s es:

$\overrightarrow{RS} = (1+2\mu, 3-8\mu, -4+2\mu) - (\lambda, -17+2\lambda, 25-2\lambda)$, es decir,

$\overrightarrow{RS} = (1+2\mu-\lambda, 20-8\mu-2\lambda, -29+2\mu+2\lambda)$ y como tiene que ser paralelo a (2, 1, 2)

$\frac{1+2\mu-\lambda}{2} = \frac{20-8\mu-2\lambda}{1} = \frac{-29+2\mu+2\lambda}{2}$ que da lugar al sistema $\begin{cases} 18\mu + 3\lambda = 39 \\ 3\lambda = 30 \end{cases}$

$\lambda = 10; \ \mu = \frac{1}{2}$

Los puntos de corte de la perpendicular común con cada una de las rectas son:
$R(10,3,5) \ y \ S(2,-1,-3)$

Y las ecuaciones de la recta t estas: $t: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

20. Considera los puntos A(0,3,-1) y B(0,1,5).

(a) [1’25 puntos] Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices A, B y C(x,4,3) tiene un ángulo recto en C..

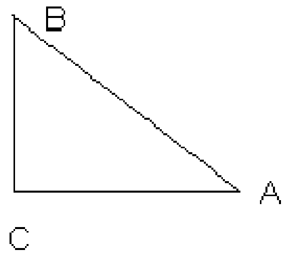
(b) [1’25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos (0,1,5) y (3,4,3) y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ **.**

Andalucía, junio 2007. Opción B

SOLUCIÓN:

a) A(0,3,-1) , B(0,1,5) y C(x,4,3)

Si el triángulo es rectángulo en C el producto escalar $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ es cero



$\overrightarrow{CA}=(-x,-1,-4);\ \overrightarrow{CB}=(-x,-3,2)$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=x^2+3-8=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

Hay dos soluciones para "x".

b) Para formar un plano necesitamos un punto y dos vectores independientes.

Como punto podemos tomar uno de los dos que nos dan, por ejemplo, $(0,1,5)$

Un vector puede ser: $v=(3,4,3)-(0,1,5)=(3,3,-2)$

El otro vector puede ser un vector de la recta dada:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases} \quad w=\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)=(-1,2,3)$$

Por tanto, $\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-5 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 9x+2(y-1)+6(z-5)+3(z-5)+4x-9(y-1)=0$

$13x-7y+9z-38=0$