ANÁLISIS DE FUNCIONES

1.- Calcula f(x) de manera que f´(x) = x Ln(x^2 + 1) y que f(0) = 0.

(nota: Ln significa logaritmo neperiano).

Universidad de Andalucía

SOLUCIÓN:

Se trata de resolver la integral $I = \int (Ln(x^2+1))x dx$ que hemos de hacerlo por partes.

Para ello hacemos: *Ln(x^2 + 1) = u* y *dv = xdx*

La primera la derivamos y la segunda la integramos:

$$\frac{2x}{x^2+1}dx = du$$
$$v = \frac{1}{2}x^2$$

Y, aplicando la fórmula de integración para este método, resulta:

$$I = uv - \int v du = \frac{x^2}{2}Ln(x^2+1) - \int \frac{x^2}{2}.\frac{2x}{x^2+1}dx$$

es decir, $I = \frac{x^2}{2}Ln(x^2+1) - I_1 \quad (*)$

siendo $I_1 = \int \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \int x dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}Ln(x^2+1)$

donde hemos simplificado y hemos hecho la división.

Sustituyendo I_1 en la expresión (*) se obtiene:

$$I = \frac{x^2}{2}Ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}Ln(x^2+1) + C$$

Si I(0) = 0,

I = 0 - 0 +0 + C = 0, es decir C = 0

luego la función buscada es:

$$f(x) = \frac{x^2}{2}Ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}Ln(x^2+1)$$

2.- Hallar la primitiva siguiente, explicando los pasos que se efectúan y justificando el método elegido: $\int \frac{x^4+x-1}{x^2-x}dx$

Universidad de Canarias

SOLUCIÓN:

En primer lugar realizamos la división. Esto se hace siempre que el grado del numerador es igual o mayor que el grado del denominador:

$$
\begin{array}{rl}
x^4+x-1 & \underline{|\,x^2-x\quad} \\
-x^4+x^3 & x^2 \;+x\;\; +1 \\
\hline
x^3+x-1 & \\
-x^3+x^2 & \\
\hline
x^2+x-1 & \\
-x^2+x & \\
\hline
2x-1 &
\end{array}
$$

Hemos obtenido $x^2 + x + 1$ de cociente y $2x - 1$ de resto, por tanto,

$$I = \int \frac{x^4+x+1}{x^2-x}dx = \int\left(x^2+x+1+\frac{2x-1}{x^2-x}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+I_1$$

Para calcular I_1 descomponemos en fracciones simple:

$$\frac{2x-1}{x^2-x} = \frac{2x-1}{(x-1)x} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x} = \frac{Ax+Bx-B}{(x-1)x}$$

Y si los denominadores son iguales, los numeradores también lo serán. entonces,

$2x-1 = Ax + Bx - B$

Haciendo $x = 1$, sale $1 = A$

Haciendo $x = 0$, resulta $-1 = -B$, es decir $B = 1$

luego

$$I_1 = \int \frac{2x-1}{x^2-x}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x}dx = L|x-1| + L|x|$$

Finalmente, después de sustituir I_1 por el resultado obtenido, obtenemos como solución,

$$I = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+L|x-1|+L|x|+C$$

3.- Sea *F(x)* la función definida por $F(x)=\int_1^{e^x-x-1} e^{-t^2}\,dt$

Halla los puntos en que se anula la función *F´(x*

Universidad de Madrid

<u>SOLUCIÓN:</u>

Tendremos en cuenta lo siguiente:

- Teorema fundamental del cálculo:

Si *f* es una función continua en [a, b], la función $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es derivable y se verifica que *F´(x) = f(x)*

- Si *g* y *h* son dos funciones derivables, la función $F(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$

es derivable y se verifica que *F´(x) = f[h(x)].h´(x) - f[g(x)].g´(x)*

(Por la regla de Barrow)

En nuestro caso, $F(x)=\int_1^{e^x-x-1} e^{-t^2}dt$ luego,

$$F'(x)=e^{-(e^x-x-1)^2}.(e^x-1)-e^{-1^2}.0=e^{-(e^x-x-1)}.(e^x-1)$$

Y si queremos que *F´(x) = 0*, ha de ser $e^x - 1 = 0$ puesto que el primero de los factores no se anula nunca. De aquí que $e^x = 1$, o lo que es igual, ***x* = *0.***

4.- Encontrar las abscisas de los posibles máximos y mínimos de la función *f: R* ⃞ *R*

definida por $f(x)=\int_0^x \frac{t^2-1}{t^4+1}dt$

Universidad de Murcia

<u>SOLUCIÓN:</u>

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4+1}$

Haciendo *f´(x) = 0*, se obtiene $x^2 - 1 = 0$, es decir, $x = 1; x = -1$

Segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{2x(x^4+1) - 4x^3(x^2-1)}{(x^4+1)^2} = \dfrac{-2x^5+4x^3+2x}{(x^4+1)^2}$

Los valores que anulan la 1ª derivada los sustituimos en la 2ª derivada:

Para x = 1, $f''(1) = \dfrac{-2+4+2}{(1^4+1)^2} > 0$

luego, existe un mínimo en x = 1.

Para x = –1, $f''(-1) = \dfrac{-2(-1)^5+4(-1)^3+2(-1)}{((-1)^4+1)^2} = \dfrac{2-4+2}{4} < 0$

Existe un máximo para x = –1

5.- Haciendo el cambio u = e^x calcular: $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$

Zaragoza, junio, 2000

SOLUCIÓN:

Si $u = e^x$, $du = e^x.dx$ y entonces, $I = \displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{e^x dx}{(e^x)^2-1} = \int \frac{du}{u^2-1} = \int \frac{1}{u^2-1}du$

Descomponiendo en fracciones simples,

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1)+B(u-1)}{u^2-1}$$

Si los denominadores son iguales, los numeradores también lo serán, por tanto,

1 = A(u+1)+B(u-1)

Si u =–1, 1 =–2B ⇒ B =–1/2

Si u = 1, 1 = 2A ⇒€A = 1/2

Volviendo a la integral,

$$I = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{u-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{u+1}\right)du = \frac{1}{2}\int\frac{1}{u-1}du - \frac{1}{2}\int\frac{1}{u+1}du$$

$$I = \frac{1}{2}L|u-1| - \frac{1}{2}L|u+1| = \frac{1}{2}\left(L|u-1| - L|u+1|\right) = \frac{1}{2}L\left|\frac{u-1}{u+1}\right|$$

Y deshaciendo el cambio de variable, $I = \frac{1}{2} L\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C$

6.- Siendo Ln(x) el logaritmo neperiano de x, considera la función *f: (0, +∞)→ R* definida por *f(x) = xLn(x)*. Calcula: $\int f(x)dx$

Una primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto (1, 0)

Andalucía, junio, 2001

SOLUCIÓN:

$\int f(x)dx = \int xLn(x)dx$

Escribiremos Lx en lugar de Ln(x) que es más cómodo.

Aplicando el método de integración por partes resulta:

$xLx = u$

$dv = dx$

La primera la derivamos y la segunda la integramos:

$(1.Lx + 1/x.\ x).dx = dv$, es decir, $(Lx + 1)dx = dv$; $v = x$

Si llamamos I a la integral, $I = u.v - \int v du = x^2 Lx - \int x(Lx + 1)dx = x^2 Lx - \int xLxdx - \int xdx$ es decir, $I = x^2 Lx - I - \frac{x^2}{2}$

Y quitando denominadores,

$2I = 2x^2\ Lx - 2I - x^2$

$4I = 2x^2\ Lx - x^2$

Despejando I tenemos la integral pedida: $I = \frac{x^2 Lx}{2} - \frac{x^2}{4} + C$

Para cada valor de C obtenemos una primitiva. Si queremos la que pasa por el punto (1, 0), damos a *x* el valor de *1* y a *I* el valor de *0* obteniendo $C = 1/4$.

La primitiva buscada es, por tanto, $\frac{x^2 Lx}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$

7.- Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola de ecuación $y^2 = x$ y el segmento cuyos extremos son los puntos *P(1, –1) y Q(4, 2)*

Oviedo, junio, 2000

SOLUCIÓN:

En primer lugar hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos *P(1,–1)* y *Q(4, 2):*

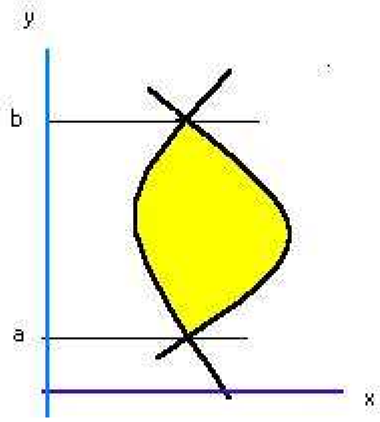
Un vector director se obtiene restando las coordenadas de ambos puntos: *v = (3, 3)*

Tomando uno de los puntos, por ejemplo, *P* y aplicando la fórmula de la ecuación continua de la recta obtenemos, después de simplificar, $x = y + 2$

Ahora aplicamos la fórmula para calcular el área limitada por las curvas

$$x = f(y);\ x = g(y)$$

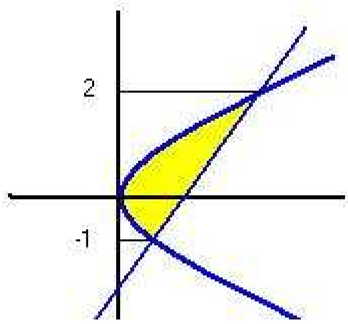
que se cortan en los puntos de ordenada $y = a$, $y = b$ que es la siguiente:



$$Area = \int_a^b [f(y) - g(y)]dy$$

tomando el resultado en valor absoluto.

En el caso que nos ocupa, si dibujamos la recta y la parábola obtenemos:



Puntos de intersección de la recta $x = y + 2$ y la parábola $x = y^2$

$y^2 - y - 2 = 0$. Y resolviendo la ecuación obtenemos $y = -1$; $y = 2$

La función a integrar es la diferencia de los dos funciones, es decir, $y^2 - y - 2$

$$Area = \int_{-1}^{2} (y^2 - y - 2)dx = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y\right]_{-1}^{2}$$

(en valor absoluto) cuyo resultado es *(8/3–2–4)–(–1/3–1/2+2) = – 4,5*

Tomando el resultado en valor absoluto obtenemos el área, es decir,

Área = 4,5 u²

8.- A. Enunciado de la Regla de Barrow.

B. Sea $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ y sea a,b$\in$ R$^+$

Demuestra que *f(a.b) = f(a).f(b)*

Galicia, junio, 2000

SOLUCIÓN:

A.- Si *f(x)* es una función continua en [a, b] y *G(x)* es una primitiva de de *f(x)*, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

B.- Resolviendo la integral dada, resulta:

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \left[L|t|\right]_1^x = Lx - L1 = Lx$$

Como *f*(x) = Lx, lo que tenemos que demostrar es que L(a.b) = La+ Lb

Si La = x $\Rightarrow$ $e^x = a$

Si Lb = y $\Rightarrow$ $e^y = b$

Multiplicando miembro a miembro,

$e^x.e^y$ = a.b, es decir, e^{x+y} =a.b

Y aplicando logaritmos neperianos, Le^{x+y} =L(a.b) $\Rightarrow$€x + y = L(a.b)

Sustituyendo x e y por sus valores indicados más arriba, se obtiene

La+Lb=L(a.b)

9.- Determinar una constante positiva *a* sabiendo que la figura plana limitada por la parábola $y = ax^2 + 2x$, la recta y = 0 y la recta x = a tiene de área $(a^2 - 1)^2$

Extremadura, junio, 2001

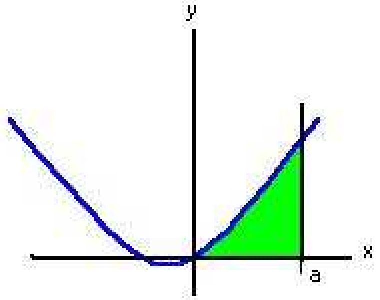
SOLUCIÓN:

Como a > 0, la parábola es abierta hacia arriba.

Puntos de corte con el eje de abscisas:

Para $y = 0$, $3ax^2 + 2x = 0$ $\Rightarrow$ $x(3ax + 2) = 0$, es decir, $x = 0$, $x = -2/3a$

El recinto limitado por la parábola, la recta $x = a$ y el eje de abscisas es la zona sombreada.



Como está en parte positiva la integral $\int_0^a (3ax^2 + 2x)dx$

es el área del recinto pedido, por tanto, $área = \int_0^a (3ax^2 + 2x)dx = \left[ax^3 + x^2\right]_0^a = a^4 + a^2$

Resultado que hemos de igualar a $(a^2 - 1)^2$

$a^4 + a^2 = a^4 - 2a^2 + 1 \Rightarrow 3a^2 = 1 \Rightarrow \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

La solución válida es la positiva.

10.- a) Definición de derivada de una función en un punto.

b) Utilizando la definición de derivada, encuentra la derivada de la función

$f(x) = \frac{3+x}{x-2}$ **en el punto** $x_o = 3$.

c) Encuentra la ecuación de la tangente a la curva $y = \frac{3+x}{x-2}$ **en el punto de abscisa** $x_0 = 3$

Murcia, septiembre, 2001

SOLUCIÓN:

a) La derivada de una función *f* en el punto de abscisa x = *a*, se define como el siguiente límite, si existe: $f'(a) = \lim_{x\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

b) $f(3) = \frac{3+3}{3-2} = 6; \quad f(3+h) = \frac{3+(3+h)}{3+h-2} = \frac{6+h}{1+h}$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{\frac{6+h}{1+h}-6}{h}=\frac{6+h-6-6h}{h(1+h)}=\frac{-5h}{h(1+h)}=\frac{-5}{1+h}$$

$$f'(3)=\lim_{x\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{-5}{1+h}=-5$$

c) Hallamos la ordenada del punto:

Para $x = 3$, $y = 6$, luego el punto es $P(3, 6)$

Pendiente de la recta tangente: es el valor de la derivada, por tanto, $m = -5$

Aplicamos la fórmula de la ecuación punto-pendiente: $y - y_0 = m\,(x - x_0)$,

donde (x_0, y_0) son las coordenadas del punto.

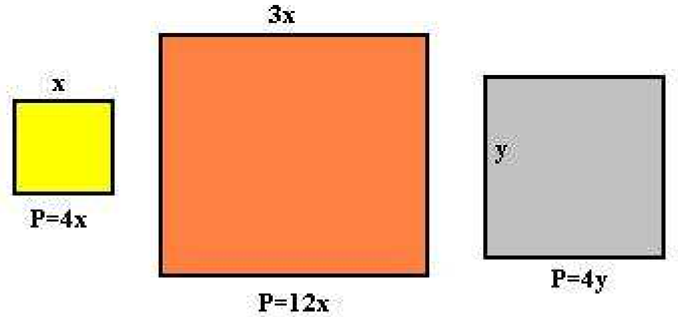
La ecuación de la recta tangente queda de la siguiente forma:

$y - 6 = -5(x-3)$, o bien en su forma explícita: $\boldsymbol{y = -5x + 21}$

11.- Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que: el perímetro de uno de ellos sea triple del perímetro de otro, se necesitan exactamente 1248 metros de valla para vallar los tres y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible

Murcia , junio, 2001

SOLUCIÓN:



Observando los dibujos tenemos:

$4x + 12x + 4y = 1248 \Rightarrow 16x + 4y = 1248$, es decir,

$4x + y = 312 \Rightarrow y = 312 - 4x$ (Condición que se tiene que dar).

El área de los tres campos es:

$A = x^2 + 9x^2 + y^2$

es decir, $A = x^2 + 9x^2 + (312-4x)^2$

Primera derivada:

A' = 2x +18x+2(312-4x)(-4)=20x -2496 + 32x = 52x - 2496

Si igualamos la derivada a cero, 52x - 2496 = 0 $\Rightarrow$ x = 48

Segunda derivada:

A" = 52 ; A" (48) = 52 >0 $\Rightarrow$ que para x = 48 existe mínimo.

Sustituyendo el valor de x en *y = 312 - 4x*, se obtiene

y = 312 - 4.48 = 144

Las dimensiones de los campos serán:

48 metros, 120 metros y 144 metros.

12.- Se divide un alambre de 100 metros de longitud en dos segmentos de longitudes *x* y *100-x.* Con el de longitud x se forma un triángulo equilátero y con el otro se forma un cuadrado. Sea *f(x)* la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado.

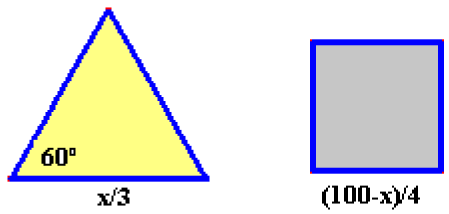
a. Determinar el dominio de la función *f*, es decir, los valores que puede tomar.

b. Con el estudio de la derivada de *f* obtener cuándo *f* es creciente y cuando es decreciente.

c. Indicar razonadamente para qué valor de *x* se obtiene que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado es mínima.

Comunidad Valenciana, junio, 2001

SOLUCIÓN:



a) El área del triángulo, cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido es:

$A_t = \frac{1}{2} lado \times lado \times sen\alpha$; es decir, $A_t = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}.sen60^o = \frac{x^2}{18}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{36}$

Para el cuadrado será: $A_c = lado^2 = \left(\frac{100-x}{4}\right)^2 = \frac{10.000-200x+x^2}{16}$

La función a minimizar es, por tanto, $f(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{36} + \frac{10.000-200x+x^2}{16}$

El dominio de la función está formado por todos los valores mayores que 0 y menores que 100, es decir, *D(f) =(0, 100)*

b) Primera derivada: $f'(x)=\dfrac{2x\sqrt{3}}{36}+\dfrac{2x-200}{16}=\dfrac{x\sqrt{3}}{18}+\dfrac{x-100}{8}=\dfrac{4x\sqrt{3}+9x-900}{72}$

Si hacemos la 1ª derivada igual a cero, $x(4\sqrt{3}+9)-900=0\Rightarrow x=\dfrac{900}{4\sqrt{3}+9}\simeq 56,5$

	(0, 56'5)	(56'5, 100)
f	–	+
f'	↘	↗

Puede comprobarse que en cualquier punto del intervalo (0, 56'5) la derivada es negativa , luego la función es decreciente.

En el intervalo (56'5, 100) la derivada es positiva, luego la función es creciente

c) En el punto x = 56'5 la derivada la función pasa de decreciente a creciente, por tanto, para dicho punto, la suma de las áreas es mínima.

13. Dadas las funciones $f(x)=(x+1)^2$, $g(x)=(x-1)^2$ **y** $h(x)=senx$ **calcula los siguientes límites :**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{h(x)}$ **(0,75 puntos)**

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{g(x)-1}$ **(0,75 puntos)**

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+g(x)-2}{(h(x))^2}$ **(1 punto)**

Asturias, junio, 2004

SOLUCIÓN:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{h(c)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^2-1}{senx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{senx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+21}{\cos x}=\dfrac{2.0+2}{1}=2$ (hemos aplicado la regla de L´Hôpital).

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{g(x)-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^2-1}{(x-1)^2-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{0+2}{0-2}=-1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+g(x)-2}{(h(x))^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2-2}{sen^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{sen^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

(Hemos tenido en cuenta que cuando $x\to 0,\ senx\cong x$)

14. Calcula los valores de *a* y de *b* para que la función $f(x)=\dfrac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical la recta x = 2 y como asíntota horizontal la recta y = 3. Razonar si para a = 2 y b = 3, la función $f(x)$ tiene algún mínimo relativo.

Aragón, junio, 2006

SOLUCIÓN:

Para que la recta x = 2 sea una asíntota vertical se ha de verificar:

$$\lim_{x\to 2}\frac{bx}{x-a}=\infty$$

Entonces, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{bx}{x-a}=\dfrac{2b}{2-a}=\infty\Rightarrow 2-a=0\Rightarrow a=2$

Para que la recta y = 3 sea una asíntota horizontal $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{bx}{x-a}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{bx}{x-2}=\dfrac{b}{1}=3\Rightarrow b=3$

Para *a* =2 y b = 3, la función es: $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$

Y para que exista mínimo relativo la primera derivada se tiene que anular, por tanto,

$$f'(x)=\frac{3.(x-2)-1.3x}{(x-2)^2}=\frac{3x-6-3x}{(x-2)^2}=\frac{-6}{(x-2)^2}=0\Rightarrow -6=0 \text{ ¡absurdo!}$$

Lo que significa que la primera derivada no se anula nunca.

No existe mínimo relativo.

15. Calcular $\int_1^2\dfrac{dx}{x^2+2x}$

Madrid, septiembre 2006

SOLUCIÓN:

Una primitiva de la función puede hallarse por el método de descomposición en fracciones.

Como las raíces del denominador de la expresión $\dfrac{1}{x^2+2x}$ son 0 y −2, se tendrá:

$$\frac{1}{x^2+2x}=\frac{1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+Bx}{x^2+2x}$$

Por tanto: $1=A(x+2)+Bx$

Si damos los valores de 0 y –2, se obtiene:

Para x = 0, $1=2A\Rightarrow\ A=\frac{1}{2}$

Para x = –2, $1=-2B\Rightarrow\ B=\frac{-1}{2}$

Luego $\int\frac{dx}{x^2+2x}=\int\left(\frac{1/2}{x}+\frac{-1/2}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}dx=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\ln(x+2)$

En consecuencia,

$$\int_1^2\frac{dx}{x^2+2x}=\left[\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\ln(x+2)\right]_1^2=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 4-\left(\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\ln 3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2^2+\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln 2-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

16. Sea $I=\int_0^2\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

a) [1,25 puntos] Expresa *I* aplicando el cambio de variable $t=1+x^2$
b) [1,25 puntos] Calcula el valor de *I*.

Andalucía, junio 2006

SOLUCIÓN:

a) $x^2+1=t\Rightarrow 2xdx=dt\Rightarrow xdx=\frac{dt}{2}$

Límites de integración:

Para x = 2, $2^2+1=t\Rightarrow t=5$

Para x = 0, $0^2+1=t\Rightarrow t=1$

$$I=\int_0^2\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^2\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}xdx=\int_1^5\frac{t-1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int_1^5\frac{t-1}{\sqrt{t}}dt$$

$$I=\frac{1}{2}\int_1^5(t^{1/2}-t^{-1/2})dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}-\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_1^5=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{5^{3/2}}{3/2}-\frac{5^{1/2}}{1/2}\right)-\left(\frac{1^{3/2}}{3/2}-\frac{1^{1/2}}{1/2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{10\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}\right)-\left(\frac{2}{3}-2\right)\right]=\frac{2\sqrt{5}+2}{3}$$

17. Sea la función real de variable real: $f(x)=\begin{cases}(1-x^2)^2 & si\ \ x\le 2\\ \dfrac{36}{2+x} & si\ \ x>2\end{cases}$

a) Razonar si la función es continua en toda la recta real.

b) Razonar si la función es derivable en toda la recta real.

Canarias, junio 2006

SOLUCIÓN:

a) El único punto dudoso es 2. En los demás puntos la función es continua.

Límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-}(1-x^2)^2=(1-4)^2=9$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{36}{2+x}=\frac{36}{2+2}=9$$

Existen los límites laterales y estos son iguales. Además, $f(2)=\dfrac{36}{4}=9$

La función es continua en toda la recta real.

b) Estudiamos la derivabilidad en el punto x = 2 ya que en los demás puntos la función es derivable.

$$f'(x)=\begin{cases}2(1-x^2).(-2x) & si\ \ x\le 2\\ \dfrac{-36}{(2+x)^2} & si\ \ x>2\end{cases}$$

$$f'(2^-)=2(1-4)(-4)=24;\quad f'(2^+)=\frac{-36}{(2+2)^2}=\frac{-36}{16}=\frac{-9}{4}$$

Como las derivadas laterales en x = 2 no coinciden, la función no es derivable en ese punto.

18. Determina los valores de *a*, *b* y *c* ∈ R para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ **pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en x = –1, y su recta tangente en x = 1 tenga pendiente 3.**

CASTILLA LA MANCHA / JUNIO 06

SOLUCIÓN:

Derivando:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b\Rightarrow f''(x)=6x+2a$$

Ahora imponemos las condiciones indicadas:

Pasa por el origen de coordenadas:

$f(0)=0,\ 0^3+a.0^2+b.0+c=0 \Rightarrow c=0$

Tiene un punto de inflexión en x = −1: La segunda derivada se anula en dicho punto.

$f''(-1)=0,\ 6.(-1)+2a=0 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$

La tangente en x = 1 tiene de pendiente 3: La primera derivada toma el valor 3 en dicho punto.

$f'(1)=3.1^2+2a.1+b=3$

$3+2.3+b=3 \Rightarrow b=-6$

Entonces, la función es: $f(x)=x^3+3x^2-6x$

19. Calcular el valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(2x))}{x^2}$

Castilla y León, junio 2006

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-2sen(2x)}{\cos(2x)}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-tg(2x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(1+tg^2(2x)).2}{1}=\dfrac{-(1+0).2}{1}=-2,$ donde hemos aplicado dos veces la regla de L`Hôpital.

20. Sea $f:R\to R$ **la función definida por** $f(x)=e^x(ax+b),$ **donde a y b son números reales.**

a) Calcula los valores de *a* y *b* para que la función tenga un extremo relativo en el punto $(3,e^3)$

b) Para los valores de *a* y *b* obtenidos, dígase qué tipo de extremo tiene la función en el punto mencionado.

Cataluña, septiembre 2006.

SOLUCIÓN:

a) Si la función tiene un extremo relativo en el punto $(3,e^3)$ entonces, 1º. Pasa por dicho punto, es decir, $e^3 = e^3(3a+b) \Rightarrow 3a+b=1$

2º. La primera derivada se anula para x = 3:

$f'(x) = e^x.(ax+b) + a.e^x;\ e^3(3a+b) + ae^3 = 0 \Rightarrow 4a+b=0$

Con las dos ecuaciones obtenidas formamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3a+b=1 \\ 4a+b=0 \end{cases} \qquad a=-1;\ b=4$$

b) Conocidos los valores de *a* y *b* la función queda de la forma siguiente: $f(x) = e^x(-x+4)$

Calculamos las derivadas primera y segunda:

$f'(x) = e^x(-x+4) + (-1).e^x = e^x(-x+3)$

$f''(x) = e^x(-x+3) + (-1).e^x = e^x(-x+2)$

Como la primera derivada se anula para x =3, sustituimos dicho valor en la segunda derivada:

$f''(3) = e^3(-3+2) = -e^3 < 0,$ luego se trata de un máximo.