ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

1.- Discutir el siguiente sistema, según los valores de λ:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 3x + 10y - z = 0 \\ x + 14y + 5z = 0 \\ x + 6y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Universidad de Andalucía

<u>SOLUCIÓN:</u>

Hay cuatro ecuaciones y tres incógnitas, una de ellas ha de ser combinación lineal de las otras:

Si aplicamos el método de Gauss resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 10 & -1 & 0 \\ 1 & 14 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & \lambda+3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4(\lambda+3) & 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 0 \end{pmatrix}$

después de dividir la segunda fila por 8 y la tercera por - 4

Si $\lambda \neq -3$, el número de ecuaciones (3) coincide con el número de incógnitas (3), luego se trata de un SCD (sistema compatible determinado), solución única, que al ser un sistema homogéneo, la solución es la trivial: x = 0; y = 0; z = 0.

Si $\lambda = -3$, el número de ecuaciones (2) es menor que el número de incógnitas (3), SCI, infinitas soluciones.

Un sistema equivalente será: $\left.\begin{array}{l} x-2y-3z=0 \\ 2y+z=0 \end{array}\right\}$

Haciendo y = k, obtenemos z = – 2k

y sustituyendo en la 1ª ecuación, x - 2k - 3(-2k) = 0, es decir, x = – 4k

La solución del sistema es, por tanto,

$$\begin{cases} x=-4k \\ y=k \\ z=-2k \\ k\in R \end{cases}$$

2.- Halla razonadamente una matriz 3x3 que dependa de los parámetros λ y μ que no tenga ningún elemento nulo y cuyo determinante sea $\lambda^2+\mu^2$.

Universidad de Murcia.

SOLUCIÓN:

Partimos de una matriz 2x2 cuyo determinante sea $\lambda^2+\mu^2$, por ejemplo,

$$M=\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$$

Det(M) = $\lambda^2+\mu^2$

Ampliamos la matriz con una fila y una columna de manera que no se altere el valor de su determinante: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & -\mu & \lambda \end{pmatrix}$

(El determinante de una matriz es igual a ala suma de los productos de una fila o columna multiplicados por sus adjuntos correspondientes)

Eliminamos los ceros de la 1ª fila sumándole la 2ª: $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & -\mu & \lambda \end{pmatrix}$

Finalmente, eliminamos los ceros de la 1ª columna sumándole la 2ª: $\begin{pmatrix} 1+\lambda & \lambda & \mu \\ \lambda & \lambda & \mu \\ -\mu & -\mu & \lambda \end{pmatrix}$

(Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de otras filas o columnas, el determinante no varía).

El determinante de esta última matriz sigue siendo $\lambda^2 + \mu^2$, como puede comprobarse.

3.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.

b) Tomando $\lambda = 1$, resuelve el sistema, escrito en forma matricial:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Andalucía, junio, 2000

<u>SOLUCIÓN:</u>

a) Si el determinante de una matriz cuadrada es igual a cero, no tiene inversa, por tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante, $\lambda + \lambda - 2\lambda^2 = -2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 2\lambda = 0$

Y dividiendo por 2 y sacando factor común, $\lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0;\ \lambda = 1$

b) Si $\lambda = 1$, el sistema dado en forma matricial queda así: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

que es equivalente al siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-1&-1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

es decir, $\begin{cases}x+2y+z=0\\-y-z=0\end{cases}$

De la 2ª ecuación resulta y = –z

Y sustituyendo en la 1ª, x + 2(– z) + z = 0; x = z

***Solución:* x = z;   y = – z;   z: cualquier número real.**

4.- Si la matriz $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ tiene determinante n, averigua el valor del determinante de las siguientes matrices: $B=\begin{pmatrix}6d&4e&2f\\3g&2h&i\\9a&6b&3c\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}d+f&e&f+e\\a+c&b&c+b\\g+i&h&i+h\end{pmatrix}$

Cantabria, junio, 2000

SOLUCIÓN:

$$Si\;\;Det(A)=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\f&h&i\end{vmatrix}=n\qquad Det(B)=\begin{vmatrix}6d&4e&2f\\3g&2h&i\\9a&6b&3c\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}9a&6b&3c\\3g&2h&i\\6d&4e&2f\end{vmatrix}$$

Después de intercambiar la primera y la tercera fila. Entonces,

$$Det(B)=-3.2.\begin{vmatrix}3a&2b&c\\3g&2h&i\\3d&2e&f\end{vmatrix}=-3.2.3.2\begin{vmatrix}a&b&c\\g&h&i\\d&e&f\end{vmatrix}$$

Donde hemos sacado factor común a la 1ª y a la 2ª columna.

Finalmente, intercambiando la 2ª y la 3ª fila, se obtiene:

$$Det(B) = -36.(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 36n$$

Calculamos ahora el determinante de C:

$$Det(C) = \begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a+c & b & c+b \\ d+f & e & f+e \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix}$$

Ahora descomponemos el determinante obtenido en dos determinantes a través de los elementos de la 3ª columna:

$$Det(C) = -\begin{vmatrix} a+c & b & c \\ d+f & e & f \\ g+i & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a+c & b & b \\ d+f & e & e \\ g+i & h & h \end{vmatrix}$$

El segundo determinante obtenido vale cero por tener dos columnas iguales, y el primero lo descomponemos también en dos determinantes a través de los elementos de la 1ª columna:

$$Det(C) = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & b & c \\ f & e & f \\ i & h & i \end{vmatrix} = -n$$

Ya que el segundo determinante obtenido también vale cero por tener dos columnas iguales.

5.- Con la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ *resolver* $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$

Obtén razonadamente la matriz inversa de una matriz A, cuadrada y de orden 3, sabiendo que $A^2 + A = I$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comunidad Valenciana, junio 2001, ejercicio A

SOLUCIÓN:

Hallamos el determinante de la matriz dada:

$Det(M) = 4 - 12 = -8$

Calculamos los adjuntos de cada uno de los elementos de dicha matriz:

$A_{11} = 2; \quad A_{12} = -4$

$A_{21} = -3; \quad A_{22} = 2$

La inversa se obtiene tomando la traspuesta de los adjuntos obtenidos y dividiendo por el determinante de *M:*

$$M^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 3/8 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Poniendo el sistema en forma matricial resulta: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

Multiplicando por M^{-1} por la izquierda $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

es decir, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 3/8 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4}.8 + \frac{3}{8}.8 \\ \frac{1}{2}.8 + \frac{-1}{4}.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

La solución es $x = 1; \; y = 2$

Para la segunda parte del problema procedemos de la siguiente forma:

Si $A^2 + A = I$ *entones,* $A(A + I) = I$

Y multiplicando por la izquierda por A^{-1} obtenemos

$A^{-1} A(A + I) = A^{-1} I$, es decir, $A + I = A^{-1}$

luego la matriz inversa de A es: $\mathbf{A^{-1} = A + I}$

6. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & x\\ 1 & x & 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de x la matriz A posee inversa?

b) Calcula la inversa de A para x = –1

c) ¿Qué dimensiones debe tener una matriz B para que la ecuación matricial A.B = C.D tenga sentido?. Calcula B para x = –1

Asturias, junio 2004

<u>SOLUCIÓN.</u>

a) Para que una matriz tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de cero.

Veamos para qué valores se anula el determinante de la matriz A:

$$|A|=\begin{vmatrix}1x & 0 & 2\\ -2 & 1 & x\\ 1 & x & 0\end{vmatrix}=-4x-2-x^2=0\Rightarrow x^2+4x+2=0\Rightarrow x=-2\pm\sqrt{2}$$

La matriz A tiene inversa para todo $x\neq -2\pm\sqrt{2}$

b) Cálculo de la inversa de A para x = –1:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-4(-1)-2-(-1)^2=1$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1;\ A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-2;\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1 \qquad A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-3;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1$$

es decir,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

c) C es una matriz de orden 3×2 y D es 2×2. C.D es, por tanto, de orden 3×2

La ecuación matricial planteada es A.B = C.D luego A.B ha de ser también de orden 3×2

Como A es 3×3 B tiene que ser 3×2

Recordemos que para que dos matrices sean multiplicables, el números de columnas de la primera matriz tiene que coincidir con el número de filas de la segunda, es decir, $\underset{m\times n}{X}\,.\,\underset{n\times p}{Y} = \underset{m\times p}{Z}$

$$A.B=C.D \Rightarrow A^{-1}.A.B=A^{-1}.C.D \Rightarrow B=A^{-1}.C.D$$

$$B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

7. Estudiar según el valor del parámetro λ, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\lambda x+y+z=1\\ x+\lambda y+z=\lambda\\ x+y+z=\lambda^2\end{cases}$$

y resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado (2,5 puntos)

Aragón, septiembre 2005

SOLUCIÓN.

Sea M la matriz de coeficientes y M* la matriz ampliada. El sistema es compatible cuando dichas matrices tiene el mismo rango; en caso contrario, el sistema no tiene solución.
Por tanto:

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1 & \lambda^2\end{array}\right)=M^*$$

La matriz de coeficientes la forman las tres primeras columnas.
Determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Se pueden dar dos situaciones:

$\lambda = 1$ y $\lambda \neq 1$

- Si $\lambda \neq 1$ el determinante de M es distinto de cero lo que significa que el rango de la matriz de coeficientes es 3. Además rang(M^*) = 3 = número de incógnitas. S.C.D.

- Si $\lambda = 1$ el determinante de M vale cero.

Además la matriz M queda de la forma siguiente: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y su rango vale uno.

Lo mismo ocurre con la matriz ampliada: $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y su rango también vale uno.

Sistema compatible indeterminado ya que los rango son iguales pero menor que el número de incógnitas.

El sistema queda de la forma siguiente:

$x + y + z = 1$

Despejando *x* obtenemos $x = 1 - y - z$ y haciendo $y = \alpha;\ z = \beta$ la solución del sistema queda así:

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

8. Responde si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta.

a) Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, se cumple que:

$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

b) Si A es una matriz cuadrada que cumple $A^2 = (0)$, **entonces tiene que ser** $A = (0)$

c) Si A es una matriz cuadrada cualquiera, se cumple que: $(A+I)(A-I) = A^2 - I$

Nota: (0) representa la matriz nula d la misma dimensión que A.

Análogamente I representa la matriz identidad.

CANTABRIA / JUNIO 05

SOLUCIÓN.

a) Es falso, pues el producto de matrices no es conmutativo: AB ≠ BA.

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + B^2 + AB + BA$

b) También es falso. Sea, por ejemplo, una matriz distinta de cero: $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}$

Entonces, $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.0+0.4 & 0.0+0.0\\ 4.0+0.4 & 4.0+0.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

c) Es cierto pues, $(A+I)(A-I)=A^2-A.I+I.A-I^2=A^2-I$ ya que $A.I=I.A$ y además $I^2=I$

9. Halle todas las matrices $A=(a_{ij})$, cuadradas de orden tres, tales que $a_{21}=a_{32}=0$ y $A+A^t=4I$, siendo I la matriz identidad de orden tres y *A*^{t} la matriz traspuesta de *A*, de la que además se sabe que su determinante vale 10.

GALICIA / JUNIO 05

SOLUCIÓN.

La matriz A será: $A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ f & 0 & g\end{pmatrix}$

Y como $A+A^t=4I$ se tiene: $\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ f & 0 & g\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & 0 & f\\ b & d & 0\\ c & e & g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2a & b & c+f\\ b & 2d & e\\ c+f & e & 2g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a=4;\ b=0;\ c+f=0\\ 2d=4;\ e=0\\ 2g=4\end{cases}$$

Entonces, $a=2;\ d=2;\ g=2;\ f=-c$

Y la matriz A queda de la siguiente forma: $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & c\\ 0 & 2 & 0\\ -c & 0 & 2\end{pmatrix}$

Como el determinante de la matriz vale 10, se obtiene: $\begin{vmatrix}2 & 0 & c\\ 0 & 2 & 0\\ -c & 0 & 2\end{vmatrix}=10;$ es decir,

$8+2c^2=10\Rightarrow c=\pm 1$. Las matrices pedidas son: $A_1=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $A_2=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

10. Estudiar el sistema según los valores de m (7 puntos) y resolverlo para m = −1 (3 puntos).

$$\begin{cases} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(m+1)y+mz=m+1 \end{cases}$$

ISLAS BALEARES / SEPTIEMBRE 05

SOLUCIÓN.

Podemos aplicar el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & m & m & m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & m \end{array}\right)$$

Pueden darse tres situaciones:

- Si $m=0$:

La matriz de coeficientes queda de la siguiente forma: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y entonces $rang(M)=2$

Matriz ampliada: $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $rang(M^*)=2$

Los rangos son iguales pero su valor es menor que el numero de incógnitas.
Sistema compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)

- Si $m=1$:

La matriz de coeficientes será: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y su rango es 2. $rang(M)=2$

Matriz ampliada: $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3; $rang(M^*)=3$

El sistema es incompatible porque los rangos no son iguales.

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$: El rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada es 3.

Y como coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

El problema también puede resolverse por determinantes.

11. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$ donde λ es un número real.

a) (1.5 puntos) Encontrar los valores de λ para los que la matriz *AB* tiene inversa.

b) (1 punto) Dados a y b números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema $A\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}$ compatible determinado con *A* la matriz del enunciado?.

ARAGÓN / JUNIO 06

SOLUCIÓN.

a) $AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1\end{pmatrix}$

Para que *AB* tenga inversa es necesario que su determinante sea distinto de 0:

$$|AB|=\begin{vmatrix}1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1\end{vmatrix}=2\lambda^2+3\lambda-2$$

Valores que anulan el determinante:

$$2\lambda^2+3\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-3\pm\sqrt{9-4.2(-2)}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}=\begin{cases}-2 \\ 1/2\end{cases}$$

Para $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 1/2$ la matiz *AB* tiene inversa.

b) $A\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}x+2y+\lambda z=a \\ x-y-z=b\end{cases}$$

Como este sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas nunca puede ser compatible determinado.