FUNCIONES

1. Si $f: N \to N$ es la función que hace corresponder a cada número natural su triple elevado al cuadrado, la fórmula matemática que la define es:

a) $f(x) = 9x^2$

b) $f(x) = 3x^2$

c) $f(x) = 9x$

(Convocatoria junio 2002. Examen tipo D)

SOLUCIÓN:

Si x es un número natural, su triple es 3x y su triple elevado al cuadrado es $(3x)^2 = 9x^2$

La opción a) es la correcta.

2. El gráfico de la función $f = x^3 - 2x + 1$ no pasa por el punto

a) (2, 5)
b) (—1, 2)
c) (—2, 3)

(Convocatoria junio 2004. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

Si el punto (2, 5) pertenece a la gráfica al sustituir la x por 2 y f por 5 se tiene que verificar la igualdad: $2^3 - 2.2 + 1 = 5$ (Cierto.)

Probamos el punto (—1, 2):
$(-1)^3 - 2(-1) + 1 = 2$
$-1 + 2 + 1 = 2$ (Cierto).

Probamos finalmente el punto (—2, 3):
$(-2)^3 - 2(-2) + 1 = 3$
$-8 + 4 + 1 = 3$ (Falso)
El punto (—2, 3) no pertenece a la gráfica de la función dada.

La opción c) es la correcta.

3. La función $f(x) = 2/(x-2)^2$, cuando $x \to 2$,

a) Tiene límite 0
b) Tiene límite ∞
c) No tiene límite.

(Convocatoria junio 2004. Examen tipo J)

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{2}{(2-2)^2} = \frac{2}{0} = \infty$$

La opción b) es la correcta.

4. El gráfico de la función $f = \sqrt{x^2+2}$ pasa por el punto

a) $(-1, 2)$

b) $(-1, \sqrt{3})$

c) $(2, \sqrt{3})$

(Convocatoria junio 2005. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

Para comprobar si un punto pertenece a la gráfica sustituimos la *x* por la abscisa del punto y la *f* por la ordenada y si se verifica la igualdad, el punto pertenece a la gráfica.

Punto $(-1, 2)$:

La función es $f = \sqrt{x^2+2}$

$2 = \sqrt{(-1)^2+2}$, es decir, $2 = \sqrt{3}$ (Falso)

La función no pasa por el punto $(-1, 2)$

Punto $(-1, \sqrt{3})$:

$\sqrt{3} = \sqrt{(-1)^2+2}$

$\sqrt{3} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ (Cierto).

La función pasa por el punto $(-1, \sqrt{3})$

Punto $(2, \sqrt{3})$:

$\sqrt{3} = \sqrt{2^2+2}$

$\sqrt{3} = \sqrt{6}$ (Falso).

La función no pasa por el punto $(2, \sqrt{3})$

La opción b) es la correcta.

5. Si $f(x) = \sqrt{x} - 4$ el punto (9, –5) está:

a) Por debajo de la gráfica de f.

b) Por encima de la gráfica de f.

c) Sobre la gráfica de f.

(Convocatoria junio 2006. Examen tipo B)

SOLUCIÓN:

Hallamos el valor que toma la función en el punto de abscisa 9:

$f(x)=\sqrt{x}-4$

$f(9)=\sqrt{9}-4=3-4=-1$

Vemos que la función toma el valor de −1 que está por encima −5, por tanto, el punto está por debajo de la gráfica.

La opción a) es la correcta.

6. Cuando $x \to 0$, la función $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x}-\dfrac{x^2+1}{x}$ tiene límite:

a) 1
b) 0
c) −1

SOLUCIÓN:

Antes de hallar el límite hacemos operaciones y simplificamos:

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x}-\frac{x^2+1}{x}=\frac{x^2-x+1-(x^2+1)}{x}=\frac{x^2-x+1-x^2-1}{x}=\frac{-x}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(-1)=-1$$

La opción c) es la correcta.

7. El límite de $f(x)=\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)}$ cuando $x \to 2$ es

a) 4/5
b) 10/3
c) 5/12

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\cancel{(x-2)}(x+3)}{(x+1)\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x+3)}{x+1}=\frac{2(2+3)}{2+1}=\frac{10}{3}$$

La opción b) es la correcta.

8. Si $f(x)=2-1/x$, el punto $(1/3,-1)$ está:

a) Por encima de la gráfica de *f*.
b) Por debajo de la gráfica de *f*.
c) Sobre la gráfica de *f*.

SOLUCIÓN:

La ordenada del punto es −1.

Veamos lo que vale la ordenada de la función: $f\left(\frac{1}{3}\right)=2-\frac{1}{\frac{1}{3}}=2-3=-1$

La ordenada del punto y la ordenada de la función valen lo mismo. El punto está sobre la gráfica de *f*.

La opción c) es la correcta.

9. Si f es decreciente en el intervalo $(-3,1)$ no puede ser

a) $f(-4/3)<f(-2/3)$

b) $f(-4/3)<f(-5/3)$

c) $f(-7/3)=f(-4/3)$

SOLUCIÓN:

La regla es la siguiente:

Si f es decreciente en un intervalo, al tomar dos puntos cualesquiera a y b del intervalo, cuando $a<b \quad f(a)\geq f(b)$

La opción a) es verdadera porque $-\frac{4}{3}<-\frac{2}{3}$ y entonces no puede ser $f\left(-\frac{4}{3}\right)<f\left(-\frac{2}{3}\right)$

La opción a) es la correcta.

10. Si *f* es creciente en el intervalo $(-3,0)$ será:

a) $f(-1)\leq f(-2)$

b) $f(-1)\geq f(-1/2)$

c) $f(-1/2)\geq f(-2)$

SOLUCIÓN:

La regla es la siguiente:

Si f es creciente en un intervalo, al tomar dos puntos cualesquiera a y b del intervalo, cuando $a<b \quad f(a)\leq f(b)$

Al ser *f* creciente:

Como $-1>-2$ debe ser $f(-1)\geq f(-2)$. La opción a) es falsa.

Como $-1<-1/2$ debería ser $f(-1)\leq f(-1/2)$. La opción b) es falsa.

Como $-1/2>-2$ debe ser $f(-1)\geq f(-1/2)$. La opción c) es verdadera.

La opción c) es la correcta.

11. La gráfica de la función $f(x)=x^2-x-2$ corta al eje de abscisas en los puntos de coordenadas:

a) $(-1,0)\ y\ (2,0)$

b) $(2,-1)\ y\ (0,0)$

c) $(0,-1)\ y\ (0,2)$

(C0nvocatoria septiembre 2001. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

Para hallar los puntos de corte de una función con el eje de abscisas, se hace $f(x)$ y se resuelve la ecuación resultante.

Si $f(x)=0,\ x^2-x-2=0$ y resolviendo la ecuación obtenemos:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4.1.(-2)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}2\\-1\end{cases}$$

Los puntos son $(2,0)\ y\ (-1,0)$

La opción a) es la correcta.

12. La gráfica de la función $f(x)=3x-6$ corta al eje de abscisas en el punto:

a) $(6,0)$ **b)** $(2,0)$ **c)** $(0,2)$

(C0nvocatoria septiembre 2002. Examen tipo B)

SOLUCIÓN:

Haciendo $f(x)=0,\ 3x-6=0$ y resolviendo la ecuación se obtiene:

$$3x=6;\quad x=\frac{6}{3}=2;\quad x=2$$

El punto de corte es $(2,0)$

La opción b) es la correcta.

13. La función $f(x)=3x^2-2x^4$ tiene derivada:

a) $f'(x)=6x^3-8x^5$

b) $f'(x)=6x-8x^3$

c) $f'(x)=6x^2-8x^4$

(Convocatoria junio 2003. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

$$f'(x)=6x-8x^3$$

La opción b) es la correcta.

14. La función $f(x)=(2-3x)^3$ tiene derivada

a) $f'(x)=3(2-3x)^2$

b) $f'(x)=-9(2-3x)^2$

c) $f'(x)=-6(2-3x)^2$

(Convocatoria junio 2003. Examen tipo E)

SOLUCIÓN:

$$f'(x)=3.(2-3x)^2.(2x-3)'=3(2-3x)^2.(-3)=-9(2-3x)^2$$

La opción b) es la correcta.

15. La derivada de la función $f(x)=3x^3-x^2 \; en \; x=3$ vale:

a) 27.
b) 41.
c) 75.

(C0nvocatoria septiembre 2003. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

$$f'(x)=9x^2-2x$$

Para hallar su derivada en x = 3, se sustituye la x por 3:

$$f'(x)=9.3^2-2.3=81-6=75$$

La opción c) es la correcta.

16. La función e^x

a) No tiene derivada.

b) Tiene derivada e^{-x}.

c) Tiene derivada e^x.

(Convocatoria junio 2004. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

La derivada de e^x es ella misma, es decir, si $f(x)=e^x$, entonces $f'(x)=e^x$

La opción c) es la correcta.

17. La función $f(x)=1/x^3$ tiene derivada

a) $f'(x)=1/(3x^2)$

b) $f'(x)=-3/x^2$

c) $f'(x)=-3/x^4$

SOLUCIÓN:

Antes de derivar ponemos la función en forma de una potencia de x:

$$f(x)=\frac{1}{x^3}=x^{-3}$$

Y ahora derivamos:

$$f'(x)=-3.x^{-3-1}=-3x^{-4}=\frac{-3}{x^4}=-3/x^4$$

También se puede hacer derivando como un cociente:

Si $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$

$$f'(x)=\frac{0.x^3-3x^2.1}{(x^3)^2}=\frac{-3x^2}{x^6}=\frac{-3}{x^4}=-3/x^4$$

La opción c) es la correcta.

18. Para $x\neq 0$ la función $f(x)=3/x$ tiene derivada

a) $f'(x)=-3/x^2$

b) $f'(x)=3/x^2$

c) $f'(x)=2/x^3$

SOLUCIÓN:

Siguiendo el criterio del ejercicio anterior, $f(x)=3/x=\dfrac{3}{x}=3x^{-1}$

Y entonces, $f'(x)=-1.3x^{-1-1}=-3x^{-2}=\dfrac{-3}{x^2}=-3/x^2$

La opción a) es la correcta.

19. **Para** $x \neq -3$ **la función** $f(x) = x/(x+3)$ **tiene derivada**

a) $f'(x) = 3/(x+3)^2$

b) $f'(x) = -3/(x+3)^2$

c) $f'(x) = -1/(x+3)^2$

SOLUCIÓN:

$$f(x) = x/(x+3) = \frac{x}{x+3}$$

Y aplicando la fórmula de la derivada de un cociente se obtiene:

$$f'(x) = \frac{1.(x+3)-1.x}{(x+3)^2} = \frac{x+3-x}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2} = 3/(x+3)^2$$

La opción a) es la correcta.

20. La derivada de $f(x) = \sqrt{x}/(1+x)$ **en el punto *x* = 1 vale:**

a) 0

b) −1

c) 1/2

(Convocatoria junio 2004. Examen tipo J)

SOLUCIÓN:

Estamos en el caso de la derivada de un cociente:

$$f(x) = \sqrt{x}/(1+x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}.(1+x)-1.\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1+x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(1+x)^2}$$

Para hallar su valor en el punto *x* = 1, se sustituye la *x* por 1:

$$f'(1) = \frac{\frac{1+1}{2\sqrt{1}}-\sqrt{1}}{(1+1)^2} = \frac{\frac{2}{2}-1}{4} = \frac{1-1}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

La opción a) es la correcta.

21. La pendiente de la tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^5-2x^3$ en el punto de abscisa $x=1/2$ vale:

a) -19/16

b) -15/7

c) -12/5

(Convocatoria septiembre 2004. Examen tipo H)

SOLUCIÓN:

La pendiente de la tangente en un punto, es exactamente el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x)=5x^4-6x^2$$

Valor de la derivada en el punto de abscisa $x=1/2$:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=5\left(\frac{1}{2}\right)^4-6\left(\frac{1}{2}\right)^2=5\frac{1}{16}-6\frac{1}{4}=\frac{5}{16}-\frac{6}{4}=\frac{5-24}{16}=\frac{-19}{16}=-19/16$$

La opción a) es la correcta.

22. La función $f(x)=x^4-x^3/2+5x^2$ tiene derivada segunda

a) $12x^2-3x+10$

b) $8x^2-3x$

c) $4x^3-3x^2$

(Convocatoria junio 2006. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

Hallamos en primer lugar la primera derivada:

Si $f(x)=x^4-x^3/2+5x^2$, es decir, $f(x)=x^4-\frac{1}{2}x^3+5x^2$, entonces,

$$f'(x)=4x^3-\frac{1}{2}.3x^2+10x=4x^3-\frac{3}{2}x^2+10x$$

Derivando la primera derivada se obtiene la segunda derivada:

$$f''(x)=12x^2-\frac{3}{2}.2x+10=12x^2-3x+10$$

La opción a) es la correcta.

23. La función $f(x)=1/(1+x^2)$ en el intervalo (0, ∞)

a) Es convexa.
b) No es cóncava ni convexa.
c) Es cóncava.

(Convocatoria septiembre 2006. Examen tipo C)

SOLUCIÓN:

La regla es la siguiente:
Si la segunda derivada es positiva, la función es convexa.
Si la segunda derivada es negativa la función es cóncava.

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=(1+x^2)^{-1}. \quad f'(x)=-1(1+x^2)^{-2}.2x=-2x(1+x^2)^{-2}=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2.(1+x^2)^2-2(1+x^2).2x.(-2x)}{(1+x^2)^4}=\frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3}=\frac{-2-6x^2}{(1+x^2)^3}=\frac{-(2+6x^2)}{(1+x^2)^3}$$

El numerador es siempre negativo
El denominador es siempre positivo.
La segunda derivada es siempre negativa. La función es cóncava.

La opción c) es la correcta.

24. Si f tiene un mínimo relativo en x = 1 y existe $\lim_{x\to 1} f(x)$, se verifica:

a) $f(0)>f(1)$
b) $f(1)\le \lim_{x\to 1} f(x)$
c) $f(0)\ge \lim_{x\to 1} f(x)$

(Convocatoria septiembre 2007. Examen tipo C)

SOLUCIÓN:

Si la función tiene un mínimo relativo en x = 1, $f(1)$ es menor que cualquier valor de la función en los alrededores del punto 1; por tanto, $f(1)\le \lim_{x\to 1} f(x)$

La opción c) es la correcta.

25. El límite de $f(x)=x^2-2x-3$ cuando $x\to -1$ es

a) 0 **b) -4** **c) 2**

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to -1}(x^2-2x-3)=(-1)^2-2.(-1)-3=1+2-3=0$$

La opción a) es la correcta.

26. Cuando $x \to 1$ $f(x) = (\sqrt{x} - 1)/(x+1)$ tiende a:

a) 1
b) -1
c) 0

SOLUCIÓN:

Se trata de hallar el límite de la función cuando $x \to 1$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x+1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x+1} = \frac{\sqrt{1} - 1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

La función tiende a 0.

La opción a) es la correcta.

27. Si es $f(x) = 1/(x - x^2) + 1/(x-1)$ se cumple:

a) $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$

b) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

c) $\lim_{x \to 1} f(x)$ **no existe.**

SOLUCIÓN:

$$f(x) = 1/(x - x^2) + 1/(x-1) = \frac{1}{x - x^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(1-x)} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x}{x(1-x)} = \frac{1}{x}$$

Entonces, $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$

La opción b) es la correcta.