VECTORES EN EL ESPACIO

1. Determina el valor de t para que los vectores de coordenadas $(1,1,t),\ 0,t,1-t)\ y\,(1,-2,t)$ sean linealmente dependientes.

SOLUCIÓN:

Si son linealmente dependientes, uno de ellos, se podrá expresar como combinación lineal de los otros restantes, por tanto,
$\alpha(0,t,1-t)+\beta(1,-2,t)=(1,1,t)$
Y de aquí se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l}\beta=1\\ \alpha t-2\beta=1\\ \alpha(1-t)+\beta t=t\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}\alpha t=3\\ \alpha(1-t)=0\end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación del segundo sistema se obtiene: $\alpha(1-t)=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ ó\\ 1-t=0\Rightarrow t=1\end{cases}$

Solución: t = 1

Y si t = 1, de la ecuación $\alpha t=3$ se obtiene: α.1 = 3, es decir, α = 3
La relación de dependencia es: $3.(0,1,0)+1.(1,-2,1)=(1,1,1)$

O bien: $\boxed{(1,1,1)-3(0,1,0)-1(1,-2,1)=(0,0,0)}$

2. Comprueba si los vectores (1, 2, 3), (4, 5, 6) y (7, 8, 9) de R^3 son linealmente dependientes.

SOLUCIÓN:

Hay varias formas para comprobarlo:
Una manera:
Hallamos el valor del determinante formado por los vectores
Si el determinante vale 0, son linealmente dependientes.
Si es distinto de cero, linealmente independientes.

$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=45+84+96-105-48-72=0\ \Rightarrow$ Los vectores son linealmente dependientes.

Otra manera:
Aplicamos el método de Gauss a la matriz formada por los vectores:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Hemos llegado a una matriz con una fila formada por ceros. Ello significa que son linealmente dependientes.

Solución: Los vectores son linealmente dependientes.

3. Halla las componentes del vector v = (1, 3, –2) respecto de la base B = { (1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 2, 3)}

SOLUCIÓN:

$\alpha(1,1,1)+\beta 81,0,1)+\lambda(0.2.3)=(1,3,-2)$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=1\\ \alpha+2\lambda=3\\ \alpha+\beta+3\lambda=-2\end{array}\right\}$$

Sumando la primera cambiada de signo a las otras dos,

$$\left.\begin{array}{l}-\beta+2\lambda=2\\ 3\lambda=-3\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda=-1 \text{ y entonces } \beta=-4$$

Si el valor de β lo llevamos a la primera ecuación del sistema inicial,

$\alpha+(-4)=1\Rightarrow\alpha=5$ $\alpha=5$

El vector v queda expresado en función de los elementos que forman la base en la forma siguiente:

$$\boxed{(1,-3,2)=5(1,1,1)-4(1,0,1)-1(0,2,3)}$$

4. Estudia si los vectores (1, 1, 0), (0,1, 1) y (2, 1 –1) forman una base de R^3.

SOLUCIÓN:

Hemos de saber que:
- Dos vectores linealmente independientes de R^2 forman una base de R^2.
- Tres vectores linealmente independientes de R^3 forman una base de R^3.

En nuestro caso si los vectores dados son linealmente independientes formarán una base.

Para saber si son linealmente independientes hallamos el determinante formado por los vectores dados:

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&-1\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=0$$

Hemos sumado a la 3ª fila la 1ª multiplicada por –2

Los vectores son linealmente dependientes y, por tanto, no forman una base de R^3.

La dependencia de los vectores dados también puede hacerse por Gauss de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones realizadas:
A la 3ª fila le hemos sumado la 1ª multiplicada por –2.
Después a la 3ª fila le hemos sumado la 2ª.

Así llegamos a una matriz que tiene la tercera fila nula, por tanto, los vectores dados son linealmente dependientes.

5. Los vectores u = (0, 1, 2), v = 2, 2, 0) y w = (1, t, 3) de R^3 verifican que u es combinación lineal de v y w para el valor t:
a) $-^7/_3$ b) $^{11}/_4$ c) $^9/_4$ d) $^5/_2$

(Convocatoria junio 2001. Examen tipo H)

<u>SOLUCIÓN:</u>

$a(2,2,0)+b(1,t,3)=(0,1,2)$
Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} 2a+b=0 \\ 2a+bt=1 \\ 3b=2 \end{array}\right\}$ De la tercera ecuación se obtiene que $b=\dfrac{2}{3}$

Sustituyendo en la primera ecuación: $2a+b=0,\ 2a+\dfrac{2}{3}=0 \Rightarrow\ 6a+2=0 \Rightarrow\ a=\dfrac{-1}{3}$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $2\left(\dfrac{-1}{3}\right)+\dfrac{2}{3}t=1 \Rightarrow\ \dfrac{-2}{3}+\dfrac{2t}{3}=1$

Quitando denominadores, $-2+2t=3$

Y despejando el valor de t, $t=\dfrac{5}{2}$

La opción d) es la correcta.

6. ¿Para qué valores de *a* y *b* los vectores $v=(2,1,-2a)$ y $w=(-ab,3,-1)$ son linealmente dependientes?

A) $a=0;\ b=0$ **B)** $a=0;\ b=-\dfrac{1}{6}$ **C)** $a=1;\ b=1$ **D)** $a=\dfrac{1}{6};b=-36$

(Convocatoria septiembre 2004. Examen tipo D)

<u>SOLUCIÓN:</u>

Para que sean linealmente dependientes los vectores tienen que ser proporcionales, es decir, $\dfrac{-ab}{2}=\dfrac{3}{1}=\dfrac{-1}{-2a}=k$ De aquí se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} -ab = 2k \\ 3 = k \\ -1 = -2ak \end{array}\right\}$$

Sustituyendo el valor de k en la 3ª ecuación del sistema, $-1 = -2a.3 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$

Nos vamos a la 1ª ecuación: $-\frac{1}{6}b = 2.3$, es decir, $-b = 36$. Cambiando el signo:

$b = -36$

La opción d) es la correcta.

7. Los vectores $u_1 = (1, 7, -1),\ u_2 = (1, 1, 1)\ \ y\ \ u_3 = (0, 3, 2)$ de $\mathbf{R}^3$ verifican:

A) $u_1 = u_2 - u_3$

B) $u_1 = 2u_2 - 3u_3$

C) Son linealmente independientes.

D) Ninguna de las anteriores respuestas.

(Convocatoria septiembre 2004. Examen tipo G)

SOLUCIÓN:

Probamos si son linealmente independientes hallando el determinante formado por los vectores dados:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 3 - 0 - 3 - 14 = -18 \neq 0$$

Como el determinante es distinto de cero, los vectores son linealmente independientes.

La opción C) es la correcta.

8. ¿Para qué valores de *b* y *c* los vectores u = (1, –2b, 2) y v = (3, –1, –4c) son linealmente dependientes?

A) $-\frac{1}{6}; -\frac{4}{3}$ **B)** $\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{3}{4}; -\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{1}{6}; \frac{-3}{2}$

(Convocatoria junio 2005. Examen tipo D)

SOLUCIÓN:

Para que sean linealmente dependientes, los vectores tienen que ser proporcionales, por tanto,

$$\frac{3}{1}=\frac{-1}{-2b}=\frac{-4c}{2}=k \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 3=k \\ -1=-2b.k \\ -4c=2k \end{array}\right\}$$

Sustituyendo el valor de k en la segunda ecuación: $-1=-2b.3 \Rightarrow 1=6b \ \Rightarrow b=\frac{1}{6}$

Sustituyendo el valor de k en la tercera ecuación: $-4c=2.3 \Rightarrow 4c=-6 \ \Rightarrow c=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$

Hemos obtenido las soluciones de la opción D.

La opción D) es la correcta.

9. Los vectores u = (1, 1, 5), v = (1, 2, 4) y w = (1, 3, 3) verifican:
A) Forman una base del espacio R^3
B) Son linealmente independientes.
C) Son linealmente dependientes.
D) 2u = v + w

(Convocatoria junio 2005. Examen tipo J.)

SOLUCIÓN:

Las opciones A) y B) son equivalentes al ser tres vectores puesto que si son linealmente independientes, forman una base de R^3.

La opción D) tampoco se verifica.

Necesariamente ha de ser la opción C) como vamos a comprobar:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6+4+15-10-12-3=0$$

El determinante formado por los tres vectores vale 0, por tanto, son linealmente dependientes.

La opción C) es la correcta.

10. ¿Para qué valores de t los vectores u = (1, 2, t), v = (1, 1, 0) y w = (0, t, 1) no forman una base de R^3?

A) $t_1=0 \ y \ t_2=2$
B) $t_1=1 \ y \ t_2=-1$
C) $t_1=1 \ y \ t_2=2$
D) $t_1=0 \ y \ t_2=-1$

SOLUCIÓN:

Como son tres vectores, para que formen base han de ser linealmente independientes, es decir, el determinante ha de ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} = 1+0+t^2-0-0-2 = t^2-1$$

Si $t^2-1=0,$ los vectores no forman base, es decir, si $t^2=1$ o bien si $t=\pm 1$
Soluciones que podemos poner de la forma siguiente: $t_1=1;\ t_2=-1$

La opción B) es la correcta.

11. Los vectores $u_1=(1,1,2),\ u_2=(1,2,1),\ u_3=(3,4,5)\ y\ u_4=(2,2,4)$ de R^3 verifican:
A) Constituyen una base de R^3.
B) No forman un sistema generador de R^3.
C) Son linealmente independientes.
D) $u_2+u_4=u_3+u_1$

SOLUCIÓN:

La opción D) es falsa puesto que $u_2+u_4=(3,4,5)$ y $u_1+u_3=(4,5,7)$

La opción C) es también falsa puesto que en R^3 no pueden existir más de 3 vectores linealmente independientes.

Tampoco es correcta la opción A) ya que una base en R^3 esta formada por 3 vectores linealmente independientes y, en este caso, hay 4 vectores.

Necesariamente la opción correcta es la B) y para comprobarlo vamos a ver que cualquier vector (x, y, z) de R^3 no puede ser generado por una combinación lineal de los vectores dados:

Si calculamos el rango del conjunto de los vectores dados, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es 2 y un conjunto de vectores de rango 2 no puede generar cualquier terna de números reales.

La opción B) es la correcta.

12. ¿Para qué valores de t los vectores u = (1, 2, 1), v = 1, 1, 0) y w = (0, t, 1), no forman una base de R^3?

A) $t_1 = 0$
B) $t_1 = 1$
C) $t_1 = -1$
D) $t_1 = 2$

SOLUCIÓN:

No forman base si los vectores son linealmente dependientes, es decir, cuando el determinante valga 0.
Veamos cuando vale 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + t - 0 - 0 - 2 = 0 \text{; es decir, } t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Para t = 1, los vectores dados no forman base de R^3 ya que son linealmente dependientes.

La opción B) es la correcta.

13. Halla el valor de *a* para que los vectores u = (–2, 1, 5) y v =(*a*, 2, 6), sean perpendiculares.

SOLUCIÓN:

Para que sean perpendiculares, el producto escalar ha de ser nulo; por tanto,
$(-2,1,5).(a,2,6) = (-2).a + 1.2 + 5.6 = -2a + 2 + 30 = 0$ y de aquí se obtiene $a = 16$

El valor de a es 16.

14. Calcula el producto vectorial de los vectores u = (1, 7, –3) y v = (–5, 0, 4).

SOLUCIÓN:

Conviene colocar el primer vector y debajo de este el segundo:

$$u = (1, 7, -3)$$
$$v = (-5, 0, 4)$$

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \right) = (28, 11, 35)$$

Otra manera de calcularlo es la siguiente:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 7 & -3 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 28i + 11j + 35k = (28, 11, 35)$$

Ejercicios propuestos con soluciones.

1. Sean los vectores de R^3: u = (1, 2, –1), v = (1, –1, 1) y w = (2, 5*a*, –3*a*)
Determina el valor numérico del parámetro *a* para que sean linealmente dependientes y encuentra una relación de dependencia.

Solución: *a* = 2.
4.(1, 2, –1) –2.(1, –1, 1) –2.(2, 10, –6) = (0, 0, 0)

2. Prueba que los vectores *a* = (1, 1, –1), b = (1, –1, 1) y c = (1, 1, 1) son una base de R^3
Halla las componentes del vector *x* =(–7, 9, 15) en esta base.

Solución: Como son tres vectores, basta probar que son l.i. (determinante ≠0)
x = –11.a –8.b+12.c

3. Dados los vectores u = (1, 2, 3) y v = 1, –1, 1), se pide:
a) ¿Son linealmente independientes?.
b) Escribe un vector w tal que u, v y w sean linealmente independientes.
c) Encuentra un vector t, tal que u, v y t sean linealmente dependientes.

Solución:
a) Sí.
b) Puede ser, por ejemplo, w = (0, 0, 1)
c) Basta tomar una combinación lineal de los vectores dados.

4. Determina los valores del parámetro a, para los cuales forman base de R^3 los vectores (*a*, 1, –2), (1, *a*, 2) y (2*a*, 1, 0).

Solución: Para todo valor *a* distinto de 1/2 y de –1.