VECTORES EN EL PLANO

1. Dados los vectores $\vec{a}(5,-3)$ y $\vec{b}(-2,6)$, calcula analíticamente $4\vec{a}-7\vec{b}$

SOLUCIÓN:

$$4\vec{a}=4(5,-3)=(20,-12)$$
$$7\vec{b}=7(-2,6)=(-14,42)$$
$$4\vec{a}-7\vec{b}=(20,-12)-(-14,42)=(34,-54)$$

2. Las componentes de u, v y w respecto de una cierta base son *u = (5,0)*, *v = (2,1)* y *w = (1,-2).* Expresa el vector u como combinación lineal de los otros.

SOLUCIÓN:

$$u=\alpha.v+\beta.w$$
$$(5,0)=\alpha(2,1)+\beta(1,-2)$$

Y se obtiene el sistema siguiente: $\begin{cases}2\alpha+\beta=5\\ \alpha-2\beta=0\end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y sumando,

$$\begin{cases}4\alpha+2\beta=10\\ \alpha-2\beta=0\end{cases} \Rightarrow 5\alpha=10\Rightarrow\alpha=\frac{10}{5}=2;\ \alpha=2$$

Sustituyendo α en la segunda ecuación del sistema, $2-2\beta=0\Rightarrow 2=2\beta\Rightarrow\ \frac{2}{2}=\beta;\ \beta=1$

La combinación lineal queda de la siguiente forma:

$$(5,0)=2(2,1)+1(1,-2)$$

3.- Halla las coordenadas del vector de origen el punto *O(-2, -1)* y extremo el punto *A(3, 3)*

SOLUCIÓN:

$$\overrightarrow{OA}=(3,3)-(-2,-1)=(5,4)$$

4. Calcula x para que *a = (5,2)* sea ortogonal a *b = (x,-5).*

SOLUCIÓN:

Si dos vectores son ortogonales su producto escalar es nulo, por tanto,

$(5,2).(x,-5) = 5x + 2(-5) = 5x - 10$

Y dicho producto tiene que valer 0.

$5x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2$

5. Halla el módulo de los siguientes vectores: a = (3,4); b = (6,-8)

SOLUCIÓN:

$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$|b| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 84} = \sqrt{100} = 10$

6. Calcula el producto escalar de dos vectores u y v sabiendo que |u|=2, |v|=3 y que forman un ángulo de 30º.

SOLUCIÓN:

$u.v = |u|.|v|.\cos\alpha = 2.3.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

7. Halla el ángulo formado por los vectores *u =-5i +12j* y *v =8i-6j*.

SOLUCIÓN:

De la definición de producto escalar se obtiene:

$u.v = |u|.|v|.\cos\alpha$

Despejando $\cos\alpha$ resulta: $\cos\alpha = \frac{u.v}{|u|.|v|}$

$u = -5i + 12j = (-5,12)$

$v = 8i - 6j = (8,-6)$

$u.v = -5.8 + 12(-6) = -40 - 72 = -112$

$|u| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \; |v| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$

$\cos\alpha = \frac{u.v}{|u|.|v|} = \frac{-112}{13.10} = \frac{-56}{13.5} = \frac{-56}{65}$

Con una calculadora se obtiene que $\alpha = 149,49^{\circ}$

8. Los vectores *u* = (-1,1) y *v* = (0,2), ¿forman una base del plano?. Expresa el vector a = (5,2) como combinación lineal de dichos vectores.

SOLUCIÓN:

$$(5,2)=\alpha(-1,1)+\beta(0,2)$$

$$\begin{cases} -\alpha=5 \\ \alpha+2\beta=2 \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $\alpha=-5$

Y sustituyendo en la segunda ecuación: $-5+2\beta=2 \Rightarrow 2\beta=7 \Rightarrow \beta=\dfrac{7}{2}$

La combinación lineal queda de la siguiente forma:

$$\boxed{(5,2)=-5(-1,1)+\frac{7}{2}(0,2)}$$

9. Dado el vector *u =3i - 4j*, referido a la base canónica. Calcula un vector de la misma dirección y sentido que u y que sea unitario

SOLUCIÓN:

$$|u|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$\frac{u}{|u|}=\frac{(3,-4)}{5}=\left(3/5, -4/5\right)$$

10. Dados los puntos *A(2,-5)* y *B(-4,-7).* Escribe las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$

SOLUCIÓN:

$$\overrightarrow{AB}=(-4,-7)-(2,-5)=(-6,-2)$$

Conocido $\overrightarrow{AB}$, el vector $\overrightarrow{BA}$ se obtiene cambiando el signo de las coordenadas de primero, es decir, $\overrightarrow{BA}=(6,2)$

11. Sean tres vectores de coordenadas $u=(a,5),\ v=(\sqrt{3},1)\ y\ w=(1,b)$
Halla *a* y *b* de forma que el vector $2u-v+3w$ tenga de coordenadas (5, 2).

SOLUCIÓN:

$$2(a,5)-(\sqrt{3},1)+3(1,b)=(5,2)$$

$$\begin{cases} 2a-\sqrt{3}+3=5 \\ 10-1+3b=2 \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene: $2a=5-3+\sqrt{3}$; $2a=2+\sqrt{3}$; $a=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

De la segunda ecuación sale: $3b=2+1-10$; $3b=-7$; $b=\dfrac{-7}{3}$