TRIGONOMETRÍA

1. Sea α un ángulo tal que $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ **y** $tg\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Entonces $\cos\alpha$ **vale:**

a) $\dfrac{1}{3}$

b) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

c) $-\dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(Convocatoria junio 2003. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

Aplicando $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, si dividimos por $\cos^2\alpha$ se obtiene:

$\dfrac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, es decir, $tg^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{2}{16}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{1}{8}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$\dfrac{9}{8}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. Despejando la incógnita: $\cos^2\alpha=\dfrac{8}{9}$ y, por tanto,

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{2^2.2}}{3}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ nos encontramos en el primer cuadrante de la circunferencia y en dicho cuadrante el coseno es positivo.

Nos quedamos con la solución positiva: $\boxed{\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

La opción d) es la correcta.

2. Sea α un ángulo tal que $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ **y** $\text{cotg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$**. Entonces:**

A) $sen\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ **B)** $sen\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **C)** $sen\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **D)** $sen\alpha=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

(Convocatoria septiembre 2004. Examen tipo G)

SOLUCIÓN:

Conocemos $\text{cotg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$ entonces aplicamos la siguiente fórmula: $\text{cotg}^2\alpha+1=\frac{1}{sen^2\alpha}$

Sustituyendo el valor de la cotangente, $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+1=\frac{1}{sen^2\alpha}$

$\frac{2}{16}+1=\frac{1}{sen^2\alpha}$, o bien $\frac{1}{8}+1=\frac{1}{sen^2\alpha}\ \Rightarrow\ \frac{9}{8}=\frac{1}{sen^2\alpha}$.

Despejando la incógnita: $sen^2\alpha=\frac{8}{9}$ y entonces, $sen\alpha=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{2^2.2}}{3}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Como estamos en el primer cuadrante tomamos la solución positiva, es decir,

$\boxed{sen\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

La opción C) es la correcta.

3. Sea α un ángulo tal que $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ **y** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$**. ¿Cuánto vale** $tg\alpha$?

A) 1 **B)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** $\frac{4}{3}$

(Convocatoria junio 2005. Examen tipo D)

SOLUCIÓN:

La solución ha de ser positiva porque estamos en el primer cuadrante.

$$sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ sen^2\alpha+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1\ \Rightarrow sen^2\alpha+\frac{1}{9}=1\ \Rightarrow sen^2\alpha=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

$sen\alpha=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{2^2.2}}{\sqrt{9}}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\boxed{sen\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}}$ (primer cuadrante, soluc. positiva)

$$tg\alpha=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{3.2\sqrt{2}}{3.1}=2\sqrt{2}$$

La opción B) es la correcta.

4. Sea α un ángulo tal que $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$. ¿Cuánto vale $cos\,\alpha$?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $-\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{1}{9}$ **D)** $\frac{2}{3}$

(Convocatoria septiembre 2005. Examen tipo E)

<u>SOLUCIÓN:</u>

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad (2\sqrt{2})^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad 8+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$9 = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{9}, \text{ por tanto, } \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \pm\frac{1}{3}$$

En el primer cuadrante el coseno es positivo: $\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{3}}$

La opción A) es la correcta.

5. Sea α un ángulo tal que $\frac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$ y $sen\alpha = -\frac{1}{3}$. La tgα vale:

A) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B)** $-2\sqrt{2}$. **C)** $2\sqrt{2}$. **D)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

<u>SOLUCIÓN:</u>

¡Cuidado que estamos en el cuarto cuadrante!.

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1; \qquad \frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1; \qquad \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Tomamos la solución positiva porque en el cuarto cuadrante el coseno es positivo: $\boxed{\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3.(-1)}{3.2\sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

Racionalizamos el resultado multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{2}$:

$$tg\alpha = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-1.\sqrt{2}}{2\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2.2} = \frac{-\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

La opción A) es la correcta.

6. Sea α un ángulo tal que $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$ y $tg\alpha = 4$. El $sen\alpha$ vale:

A) $\frac{3\sqrt{14}}{14}$ **B)** $-\frac{4\sqrt{14}}{14}$ **C)** $-\frac{1}{17}$ **D)** $-\frac{4\sqrt{17}}{17}$

SOLUCIÓN:

Como $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$ estamos en el tercer cuadrante donde el seno es negativo.

Aplicamos la fórmula $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$:

$4^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, es decir, $17 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. Entonces $\cos^2\alpha = \frac{1}{17}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{17}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$.

En el tercer cuadrante el coseno es negativo luego $\boxed{\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

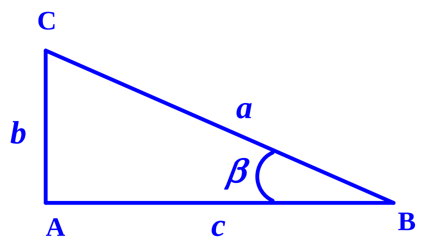
Ahora aplicamos la fórmula: $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$

$4 = \frac{sen\alpha}{\frac{-1}{\sqrt{17}}}$; $4 = \frac{\sqrt{17}.sen\alpha}{-1}$, es decir, $\sqrt{17}.sen\alpha = -4$ y despejando la incógnita,

$sen\alpha = \frac{-4}{\sqrt{17}} = \frac{-4.\sqrt{17}}{\sqrt{17}.\sqrt{17}} = \frac{-4\sqrt{17}}{17} = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$ (Hemos racionalizado el resultado).

La opción D) es la correcta.

7. En un triángulo rectángulo *ABC* se sabe que $a = 16$ y $sen\beta = \frac{1}{4}$. ¿Cuánto vale el coseno del ángulo β y el cateto opuesto a β?



A) $\cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $b = 4$

B) $\cos\beta = \frac{3}{4}$; $b = 4$

C) $\cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $b = 4\sqrt{15}$

D) $\cos\beta = \frac{1}{4}$; $b = 3$

SOLUCIÓN:

Por definición: $sen\beta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$, por tanto, $\frac{1}{4} = \frac{b}{16}$ $\quad b = \frac{16.1}{4} = 4$

Aplicando la fórmula $sen^2\beta + \cos^2\beta = 1$, obtenemos:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\beta = 1; \quad \frac{1}{16} + \cos^2\beta = 1; \quad \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{16}; \quad \cos^2\beta = \frac{15}{16};$$

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

La opción A) es la correcta.

8. Un ángulo α mide 5º. ¿Cuánto mide α en radianes?.

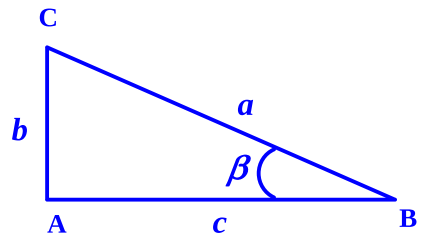
SOLUCIÓN:

Teniendo en cuenta que $\pi\, radianes = 180^{\circ}$, planteamos la siguiente regla de tres simple:

π radianes	————	180º
x radianes	————	5º

$$x = \frac{5.\pi}{180} = \frac{\cancel{5}.\pi}{36.\cancel{5}} = \frac{\pi}{36}\ radianes$$

9. En el triángulo de la figura *a* = 5 cm. y *c* = 4 cm. Calcula el lado *b* y la tangente del ángulo β



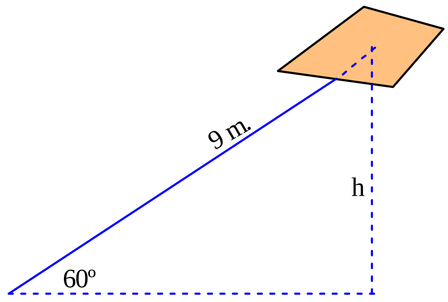
SOLUCIÓN:

Por el teorema de Pitágoras, $b^2 + c^2 = a^2$

$$b^2 + 4^2 = 5^2; \quad b^2 + 16 = 25; \quad b^2 = 25 - 16 = 9; \quad b = \sqrt{9} = 3$$

$$tg\beta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{b}{c} = \frac{3}{4}$$

10. Jaime está volando una cometa. Ha soltado 9 m de cuerda y esta forma 60º con el suelo. ¿A qué altura vuela la cometa?



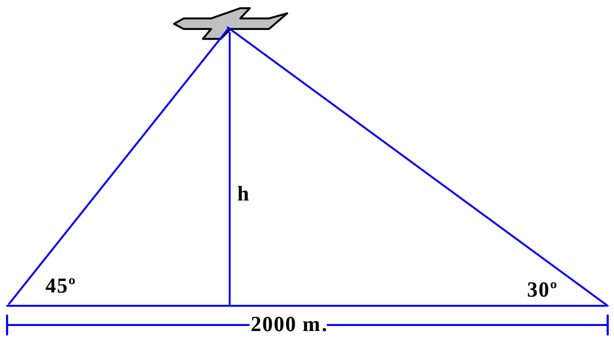
SOLUCIÓN:

$sen 60^{o} = \frac{h}{9}$. El ángulo de 60º es un ángulo notable y debemos conocer los valores de sus razones trigonométricas. Se aplica la siguiente regla:

Ángulo	0º	30º	45º	60º	90º
Seno	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{h}{9}$ y despejando h obtenemos: $h=\frac{9\sqrt{3}}{2}$. La cometa vuela a $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ metros.

11. Halla razonadamente, a qué altura vuela el avión de la figura:



SOLUCIÓN:

Si llamamos x al cateto del triángulo que se forma en la izquierda del dibujo, resulta:

$tg 45^{o} = \frac{h}{x}$; $1=\frac{h}{x}$, luego $h=x$

En el triángulo de la derecha: $tg 30^{o} = \frac{h}{2000-x}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{h}{2000-x}$ y como $h=x$

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{h}{2000-h}$. Quitando denominadores,

$h\sqrt{3}=2000-h \Rightarrow h\sqrt{3}+h=2000 \Rightarrow h(\sqrt{3}+1)=2000$ y despejando h,

$$h=\frac{2000}{\sqrt{3}+1}=\frac{2000(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2000(\sqrt{3}-1)}{2}=1000(\sqrt{3}-1)\,metros$$