SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. La solución (x_1, y_1, z_1) del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+2z=6 \\ -2x+3y+z=1 \\ -2x+y-z=-3 \end{array}\right\} \text{ verifica:}$$

A) $x_1 \leq 0;\ y_1 \leq 3;\ \ z_1 \leq 1$

B) $x_1 + z_1 = \dfrac{7}{2}$

C) $x_1 + z_1 = \dfrac{5}{2}$

(Convocatoria Junio 2001. Examen tipo G)

SOLUCIÓN:

Partiendo del sistema inicial, empezamos eliminando la incógnita *x*:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+2z=6 \\ -2x+3y+z=1 \\ -2x+y-z=-3 \end{array}\right\}$$

(primera ecuación)x2 ; segunda ecuación

$$\begin{array}{r} \cancel{2x}+4y+4z=12 \\ -\cancel{2x}+3y+z=1 \\ \hline \text{sumando:}\quad 7y+5z=13 \end{array}$$

(primera ecuación)x2 ; tercera ecuación

$$\begin{array}{r} \cancel{2x}+4y+4z=12 \\ -\cancel{2x}+y-z=-3 \\ \hline \text{sumando:}\quad 5y+3z=9 \end{array}$$

multiplicada por -3 ; multiplicada por 5

$$\begin{array}{r} -21y-\cancel{15z}=-39 \\ 25y+\cancel{15z}=45 \\ \hline \text{sumando:}\quad 4y=6 \end{array}$$

Y despejando la y, $\quad y=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$ $\quad$ Ya tenemos una solución: $\quad y_1=\dfrac{3}{2}$

Llevando el valor de y_1 a la ecuación $5y+3z=9$, obtenemos:

$$5.\frac{3}{2}+3z=9 \Rightarrow \frac{15}{2}+3z=9 \Rightarrow 15+6z=18 \ \Rightarrow 6z=3 \Rightarrow z=\frac{3}{6}=\frac{1}{2};\ \ z_1=\frac{1}{2}$$

Finalmente, en la primera ecuación del sistema inicial, sustituimos los valores de las incógnitas obtenidas y obtenemos: $x+2.\dfrac{3}{2}+2.\dfrac{1}{2}=6 \Rightarrow x+3+1=6 \Rightarrow x=2;\ x_1=2$

$x_1+z_1=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$.

La respuesta correcta es la C)

2. La solución (x_1, y_1, z_1) del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 1 \\ 2x - 4y - 2z = -2 \end{array}\right\} \text{ verifica:}$$

A) $x_1 + z_1 \leq 1$

B) $x_1 + y_1 \leq \dfrac{1}{2}$

C) $x_1 \leq y_1 \leq z_1 \leq 0$

(Convocatoria septiembre 2001. Examen tipo A)

<u>SOLUCIÓN:</u>

(primera ecuación)x(-2): $\quad -\cancel{2x} + 2y - 4z = -2$

segunda ecuación: $\quad \cancel{2x} + 3y - 3z = 1$

sumando: $\quad 5y - 7z = -1$

(primera ecuación)x(-2): $\quad -\cancel{2x} + 2y - 4z = -2$

tercera ecuación: $\quad \cancel{2x} - 4y - 2z = -2$

sumando: $\quad -2y - 6z = -4$

dividida por 2: $\quad -y - 3z = -2$

multiplicada por 5

$$\begin{array}{r} \cancel{5y} - 7z = -1 \\ -\cancel{5y} - 15z = -10 \\ \hline \end{array}$$

sumando: $\quad -22z = -11 \quad \Rightarrow 22z = 11 \quad \Rightarrow z = \dfrac{11}{22} = \dfrac{1}{2}$

Llevando el valor de **z** a la ecuación $-y - 3z = -2$, se obtiene:

$$-y - 3.\frac{1}{2} = -2 \Rightarrow y + \frac{3}{2} = 2 \Rightarrow y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Llevando los valores de **z** y de ***y*** a la primera ecuación del sistema inicial, resulta:

$$x - \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow x - \frac{1}{2} + 1 = 1 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Hemos obtenido la siguiente solución:

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{2}; \quad y_1 = \frac{1}{2}; \quad z_1 = \frac{1}{2}}$$

Comprobando las opciones que se verifican sólo es verdadera la primera, por tanto, **la opción correcta es la A)**

3. El sistema $\left.\begin{array}{l} x-y-az=0 \\ x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}$ verifica:

A) Para $a=-1$, es compatible indeterminado
B) Para $a=-1$, es compatible determinado.
C) $x_1=y_1=z_1=a$
D) Para $a=-1$, es incompatible.

(Convocatoria septiembre 2002. Examen tipo B)

SOLUCIÓN:

Se trata de un sistema homogéneo y los sistemas homogéneos son siempre compatibles, por tanto, la opción D) está descartada.

Siempre tienen al menos la solución trivial (0,0,0).y se aplica la siguiente regla:

Para que un sistema homogéneo tenga solución distinta de la trivial, una vez aplicada la reducción de Gauss, el número de ecuaciones ha de ser menor que el número de incógnitas.

Aplicamos el método de Gauss para $a=-1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos sumado a la 2ª y a la 3ª filas, la 1ª cambiada de signo

Terminada la reducción de Gauss, vemos que sólo hay dos filas no nulas; es decir, dos ecuaciones, por tanto, el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas. Sistema compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)

La opción A) es la correcta

Si queremos indicar todas la soluciones del sistema, observando la segunda matriz obtenida, de la segunda fila resulta:

$$2y=0 \quad \Rightarrow y=\frac{0}{2}=0$$

De la primera fila de la matriz obtenemos:

$$x-1.0+z=0 \quad \Rightarrow x+z=0 \ \Rightarrow x=-z$$

Las soluciones son:

$$\boxed{x=-z; \quad y=0; \ z \, es \, cualquier \, número \, real}$$

4. La solución (x_1, y_1, z_1) del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=3 \\ x+4y-3z=1 \\ -2x+y+3z=0 \end{array}\right\} \text{verifica:}$$

A) $x_1 = 3y_1$ C) $x_1 > 4$

B) $y_1 < 0$ D) $z_1 > 1$

(Convocatoria junio 2003. Examen tipo J)

SOLUCIÓN:

Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 10 & -10 & -10 \\ 0 & -10 & -2 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 10 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -12 & -22 \end{pmatrix}$$

A la 2ª fila sumamos la 1ª cambiada de signo. A la 3ª fila sumamos la 1ª multiplicada por 2

Multiplicamos la 2ª fila por 5. Multiplicamos la 3ª fila por -2

A la 3ª fila le sumamos la 2ª

De la 3ª fila de la última matriz se obtiene: $-12z = -22 \Rightarrow 6z = 11 \Rightarrow z = \dfrac{11}{6}$

De la 2ª fila de la 2ª matriz resulta: $2y - 2.\dfrac{11}{6} = -2 \Rightarrow 12y - 22 = -12 \Rightarrow 12y = 10$

$\Rightarrow y = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

De la 1ª fila de la 1ª matriz obtenemos: $x + 2.\dfrac{5}{6} - \dfrac{11}{6} = 3 \Rightarrow x + \dfrac{10}{6} - \dfrac{11}{6} = 3 \Rightarrow x - \dfrac{1}{6} = 3$,

es decir, $x = 3 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{19}{6}$

Hemos obtenido la siguiente solución:

$$\boxed{x_1 = \dfrac{19}{6}; \quad y_1 = \dfrac{5}{6}; \quad z_1 = \dfrac{11}{6}}$$

La opción A) no se cumple. La opción B) tampoco se verifica. Lo mismo ocurre con la opción C).

La opción D) es la correcta pues $z_1 = \dfrac{11}{6} > 1$

5. La solución (x_1, y_1, z_1) del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} -x+2y+z=3 \\ 3x+y-2z=0 \\ -3x+4y+z=1 \end{array}\right\} \text{ verifica:}$$

A) $z_1 > 3$ B) $x_1 > 2$

C) $x_1 < 1$ D) $y_1 > 1$

(Convocatoria septiembre 2003. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 14 & 2 & 18 \\ 0 & -14 & -14 & -56 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 14 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & -12 & -38 \end{pmatrix}$$

De la tercera fila de la última matriz se obtiene: $-12z = -38 \Rightarrow 12z = 38 \Rightarrow z = \frac{38}{12} = \frac{19}{6}$

es decir, $z_1 = \frac{19}{6} > 3$ **La opción A) es la correcta.** No es necesario continuar.

6. El sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x-y-z=0 \\ 3x+2y-8z=0 \\ 2x+y-5z=0 \end{array}\right\}$ verifica:

A) La solución es $x = 2\lambda;\ y = \lambda;\ z = \lambda$

B) Es un sistema compatible determinado.

C) No tiene ninguna solución.

D) Ninguna de las anteriores respuestas.

(Convocatoria septiembre 2004. Examen tipo D)

SOLUCIÓN:

La opción C) está descartada porque los sistemas homogéneos siempre tienen solución.
Aplicando la reducción de Gauss obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & -15 & 0 \\ 0 & -15 & 15 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos llegado a un matriz cuyo número de filas no nulas es menor que el número de incógnitas. Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones.
De la segunda fila de la última matriz se obtiene:
$15y - 15z = 0 \Rightarrow y - z = 0 \Rightarrow y = z$

De la primera fila se obtiene: $x - y - z = 0$. Como $y = z$, $x - z - z = 0 \Rightarrow x = 2z$.

Si hacemos $z = \lambda$, las soluciones son: $\boxed{x = 2\lambda;\ y = \lambda;\ z = \lambda}$

La opción A) es la correcta.

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
A) Todo sistema de más incógnitas que ecuaciones tiene solución.
B) Un sistema lineal homogéneo tiene siempre solución.
C) Todo sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas tiene solución.
D) Todo sistema de más ecuaciones que incógnitas tiene solución.

(Convocatoria junio 2005. Examen tipo D)

SOLUCIÓN:

El número de ecuaciones y de incógnitas de un sistema no tiene nada que ver para que tenga solución o no la tenga.
Un sistema puede ser compatible o incompatible independiente del número de ecuaciones y de incógnitas.
Referente a los sistemas homogéneos sí podemos decir que siempre son compatibles pues, en el peor de los casos, siempre tiene la solución trivial. Por tanto, la respuesta correcta es la segunda afirmación.

La opción B) es la correcta.

8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
A) Un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas tiene siempre solución.
B) Todo sistema de más ecuaciones que incógnitas tiene solución.
C) Todo sistema lineal homogéneo carece de solución.
D) Si un sistema homogéneo admite soluciones distintas de la (0, 0, …., 0) el rango de la matriz de los coeficientes es menor que el número de incógnitas.

(Convocatoria junio 2005. Examen tipo J)

SOLUCIÓN:

Las opciones A) y B) son falsas pues ya sabemos que el número de ecuaciones y de incógnitas no tiene nada que ver con que tenga solución o no.

La opción C) también es falsa ya que los sistemas homogéneos siempre tiene al menos la solución trivial.

Respecto a la tercera opción hemos de saber primeramente lo que es el rango: **El rango de una matriz es el número de filas no nulas después de aplicar la reducción de Gauss**.
Cuando el número de filas no nulas después de aplicar Gauss (o lo que es lo mismo el rango de la matriz de coeficientes) es menor que el número de incógnitas el sistema tiene infinitas soluciones.

La opción D) es la correcta.

9. El sistema $\begin{cases} x-y-z=0 \\ 3x+2y-8z=0 \\ 2x+y-5z=0 \end{cases}$ verifica:

A) El compatible indeterminado.
B) Es compatible determinado
C) Es incompatible
D) Tiene una única solución.

(Convocatoria septiembre 2005. Examen tipo C)

SOLUCIÓN:

Es claro que las opciones B) y D) dicen lo mismo pues compatible determinado y solución única es lo mismo, por tanto, estas opciones tienen que ser falsas ya que sólo hay una verdadera.
La opción C) es falsa puesto que los sistemas homogéneos son siempre compatibles.
Necesariamente la opción A) ha de ser la verdadera.

Comprobamos que así es aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & -15 & 0 \\ 0 & -15 & 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pasos realizados:
Sumamos a la segunda fila la primera multiplicada por -3
Sumamos a la tercera fila la primera multiplicada por -2
Paso de la segunda matriz a la tercera:
Multiplicamos la segunda fila por 3 y la tercera por -5
Una vez situados en la tercera matriz, sumamos a la tercera fila la segunda .
Llegamos finalmente a una matriz en la que el número de filas no nulas es menor que el número de incógnitas luego se trata de un sistema compatible indeterminado.
Con otras palabras: El rango de la matriz obtenida es 2 < que el número de incógnitas, por tanto, sistema compatible indeterminado.

La opción correcta es la A)

Podemos también obtener las soluciones del sistema:
De la segunda fila de la última matriz, se obtiene:
$15y-15z=0 \;\; \Rightarrow y-z=0 \;\Rightarrow y=z$

De la primera fila de matriz se obtiene:
$x-y-z=0$
Por tanto, como $y=z, \quad x-z-z=0 \;\Rightarrow x-2z=0 \quad x=2z$

Hemos obtenido las siguientes soluciones:

$$\boxed{x=2z; \quad y=z; \quad z: \textit{cualquier número real}}$$

10. Si (x_1, y_1, z_1) es una solución, **distinta de la trivial**, del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-5z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x+2y-8z=0 \end{array}\right\} \text{ entonces,}$$

A) $x_1 + y_1 = z_1$

B) $x_1 + z_1 = y_1$

C) $x_1 + y_1 + z_1 = 0$

D) $y_1 + z_1 = x_1$

(Convocatoria septiembre 2007. Modelo E)

SOLUCIÓN:

El sistema propuesto es el mismo que el del ejercicio anterior con las ecuaciones en distinto orden por lo tanto son sistemas equivalentes.
Para resolverlo podemos alterar el orden de las ecuaciones a fin de obtener en la matriz asociada al sistema un **1** en el vértice superior izquierdo. Esto facilita la aplicación del método de Gauss.

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 3x+2y-8z=0 \\ 2x+y-5z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & -15 & 0 \\ 0 & -15 & 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la segunda fila de la última matriz, se obtiene:
$15y - 15z = 0 \Rightarrow y - z = 0 \Rightarrow y = z$

De la primera fila de matriz se obtiene:
$x - y - z = 0$
Por tanto, como $y = z$, $x - z - z = 0 \Rightarrow x - 2z = 0 \quad x = 2z$

$$\boxed{x_1 = 2z_1; \quad y_1 = z_1}$$

Opción A) $x_1 + y_1 = 3z_1$ (Falsa)

Opción B) $x_1 + z_1 = 3z_1$ (Falsa)

Opción C) $x_1 + y_1 + z_1 = 2z_1 + z_1 + z_1 = 4z_1$ (Falsa)

Opción D) $y_1 + z_1 = z_1 + z_1 = 2z_1 = x_1$ (Verdadera)

La opción correcta es la D)

11. El sistema $\left.\begin{array}{r} 7y-10z=4 \\ 2x-3y+4z=4 \\ x+2y-3z=0 \end{array}\right\}$ verifica:

A) Tiene solución única
B) Es compatible indeterminado.
C) Es incompatible.
D) Es compatible determinado.

SOLUCIÓN:

Formamos la matriz asociada al sistema de ecuaciones poniendo en primer lugar la tercera ecuación y aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 4 \\ 0 & -7 & 10 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

A la 3^a fila le sumamos la 1^a multiplicada por -2

A la tercera fila le sumamos la segunda

De la tercera fila de la última matriz obtenida resulta:
$0z=8 \Rightarrow 0=8$ ¡absurdo!
El sistema no tiene solución. Es incompatible.

La opción correcta es la C)

Otra manera de interpretarlo es la siguiente:
Se llama matriz de coeficientes a la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas.
Se llama matriz ampliada a la formada por los coeficientes de las incógniatas y los términos independientes.

Rango de la matriz de coeficientes: 2 (número de filas no nulas)
Rango de la matriz ampliada: 3 (número de filas no nulas)

COMO LOS RANGOS NO SON INGUALES EL SISTEMA NO TIENE SOLUCIÓN. (Teorema de Rouché).