POLINOMIOS Y FRACCIONES

1. Una descomposición en fracciones simples de la fracción $\frac{x+1}{x^2-3x+2}$ es:

A) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+2}$

B) $\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{x-2}$

C) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}$

D) $\frac{x}{x^2}+\frac{1}{2-3x}$

(Convocatoria junio 2003. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

Hallamos en primer lugar las raíces del denominador de la fracción:

$x^2-3x+2=0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4.2.1}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$

La fracción dada queda expresada de la siguiente forma:

$\frac{x+1}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-1}=\frac{a(x-1)+b(x-2)}{(x-2)(x-1)}$

Igualando los numeradores de la primera y de la última fracción, se obtiene:

$x+1=a(x-1)+b(x-2)$

A continuación damos a x los valores de las raíces obtenidas:

Para $x=2,\ 2+1=a(2-1)+0$, es decir, $a=3$

Para $x=1,\ 1+1=0+b(1-2)$, es decir, $b=-2$

La descomposición queda de la siguiente forma:

$$\boxed{\frac{x+1}{x^2-3x+2}=\frac{3}{x-2}+\frac{-2}{x-1}}$$

La opción B) es la correcta.

2. Sea $P=x^3+mx^2-2x+m$. Para que el resto de la división de P entre $x-1$ sea 3, m debe valer:

A) 4. B) –1. C) 2. D) –3.

(Convocatoria septiembre 2003. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

Aplicamos el teorema del Resto:
El resto obtenido al dividir un polinomio entre *x–a*, coincide con el valor numérico de dicho polinomio para *x* = *a*.

En el caso que nos ocupa, el resto de la división de $x^3 + mx^2 - 2x + m$ entre *x*–1, vale lo mismo que el valor numérico del polinomio dado para *x* = 1 que es 3.
Por tanto, $1^3 + m.1^2 - 2.1 + m = 3$
$1 + m - 2 + m = 3 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$

La opción C) es la correcta.

3. El m.c.m. de los polinomios $P = x^4 - x^2 \; y \; Q = x^3 - 2x^2 + x$ **es:**

A) $x^2(x-1)^2$

B) $x^2(x+1)(x-1)^2$

C) $x(x+1)(x-1)^2$

D) $x(x-1)$

SOLUCIÓN:

En primer lugar factorizamos los polinomios:

$$P = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x+1)(x-1)$$

$$Q = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$$

Para hallar el m.c.m. tomamos un factor de cada clase eligiendo siempre el de mayor exponente:

$$\boxed{m.c.m.(P,Q) = x^2(x+1)(x-1)^2}$$

La opción C) es la correcta.

4. El m.c.m. de los polinomios $Q = x^3 - 2x^2 + x \; y \; R = x^3 + 2x^2 + x$ **es:**

A) $x(x-1)(x+1)$

B) $x(x+1)^4$

C) $x(x-1)^2(x+1)^2$

D) x

SOLUCIÓN:

$$Q = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$$

$$R = x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$$

$$\boxed{m.c.m.(Q,R) = x(x-1)^2(x+1)^2}$$

La opción C) es la correcta.

5. Una descomposición en fracciones simples de la fracción $\frac{3}{x^2-3x+2}$ es:

A) $\frac{3}{x-2}+\frac{-3}{x-1}$

B) $\frac{x}{x^2-x}+\frac{1}{x-1}$

C) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-x}$

D) $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{(x-1)^2}$

<u>SOLUCIÓN:</u>

Raíces del denominador de la fracción:

$x^2-3x+2=0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4.2}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$

$\frac{3}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}=\frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$

Igualamos los numeradores: $3=a(x-2)+b(x-1)$

Damos a x los valores de las raíces:

Para $x=2$, $3=0+b(2-1)\Rightarrow b=3$

Para $x=1$, $3=a(1-2)+0\Rightarrow 3=-a;\ a=-3$

La descomposición queda en la forma siguiente: $\boxed{\frac{3}{x^2-3x+2}=\frac{-3}{x-1}+\frac{3}{x-2}}$

La opción A) es la correcta.

6. Uno de los sumandos de la descomposición en fracciones simples de la fracción $\frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}$ es:

A) $\frac{-3}{(x-1)^2}$

B) $\frac{5}{x-2}$

C) $\frac{-2}{(x-1)^2}$

D) $\frac{-2}{x-1}$

(Convocatoria septiembre 2003. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

Como el denominador de fracción dada es de tercer grado, para hallar las raíces tenemos que hacerlo por la regla de Ruffini:

	1	-4	5	-2
1	↓	1	-3	2
	1	-3	2	0

Ya tenemos una raíz: 1

Las otras dos raíces podemos obtenerlas resolviendo la ecuación de 2º grado que aparece reflejada en la tabla con números rojos:

$$x^2-3x+2=0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4.2}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$$

$$\frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)^2+b(x-2)(x-1)+c(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

Igualando los numeradores:

$$x+1=a(x-1)^2+b(x-2)(x-1)+c(x-2)$$

$$Para\ \ x=1,\ \ 2=c(1-2)\Rightarrow c=-2$$

$$Para\ \ x=2,\ 3=a$$

Nos falta otro valor para *x* que podemos elegirlo arbitrariamente.

$$Para\ \ x=3,\ 4=a(3-1)^2+b(3-2)(3-1)+c(3-2)$$

$$4=3.4+b.1.2+(-2).1$$

$$4=12+2b-2$$

$$-6=2b\Rightarrow b=-3$$

La descomposición de la fracción queda de la siguiente forma:

$$\boxed{\frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3}{x-2}+\frac{-3}{x-1}+\frac{-2}{(x-1)^2}}$$

La opción C) es la correcta.