MATRICES

1. El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **es:**

- **A) 2**
- **B) 0**
- **C) 2×2**
- **D) 1**

(Convocatoria 2007. Examen modelo E)

SOLUCIÓN:

El rango de una matriz es el número de filas no nulas una vez aplicada la reducción de Gauss, por tanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como hay dos filas no nulas, el rango es 2.

La respuesta correcta es la opción A)

2. El producto de las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **es:**

$a)\ A.B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 19 \\ 8 & 14 & 38 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

$b)\ A.B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$c)\ A.B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$d)\ A.B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}$

(Convocatoria 2007. Examen modelo C)

SOLUCIÓN:

La multiplicación es posible porque el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda. $A.B = C$

Como A es de orden 3×2 y B es de orden 2×3 el resultado será una matriz de orden 3×3

Cada elemento de la matriz C se obtiene multiplicando **ordenadamente** cada elemento de la fila ***i*** de la matriz A por cada elemento de la columna ***j*** de matriz B y sumando los resultados.

$c_{11} = 3.1 + 2.1 = 5;\quad c_{12} = 3.0 + 2.2 = 4;\quad c_{13} = 3.3 + 2.5 = 19$

$c_{21} = 1.1 + 7.1 = 8;\quad c_{22} = 1.0 + 2.7 = 14;\quad c_{23} = 1.3 + 7.5 = 38$

$c_{31} = 0.1 + 2.1 = 2;\quad c_{32} = 0.0 + 2.2 = 4;\quad c_{33} = 0.3 + 2.5 = 10$

Por tanto, $A.B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 19 \\ 8 & 14 & 38 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

La respuesta correcta es la opción A)

3. El rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ **es:**

- **a) ½**
- **b) ∞**
- **c) 0**
- **d) Ninguna de las anteriores respuestas.**

SOLUCIÓN:
Aplicando el método de Gauss se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Terminada la reducción de Gauss, el número de filas no nulas es 2, por tanto, $rang(A) = 2$

La respuesta correcta es la opción d)

4. Para que el producto de $A.B$ **de las matrices** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **y** $B = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ **sea la matriz** $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, **k debe valer:**

- **a) 0**
- **b) Cualquier valor.**
- **c) 3**
- **d) 6**

SOLUCIÓN:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} k & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.k + 1.3 & 0.1 + 1.0 \\ -1.k + 2.3 & -1.1 + 2.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -k + 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Para obtener el resultado que pretendemos ha de ser $-k + 6 = 0 \Rightarrow k = 6$

La respuesta correcta es la opción d)

5. Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 7 & 2\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, **la matriz B^2 –$3A$ es:**

a) $\begin{bmatrix}-8 & -6\\ -10 & 12\end{bmatrix}$ **b)** -1

c) $\begin{bmatrix}-9 & -5\\ -21 & -2\end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 7 & -3\end{bmatrix}$

(Convocatoria septiembre 2005. Examen tipo E)

SOLUCIÓN:

$$B^2-3A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}3 & 1\\ 7 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+0 & 0-2\\ 0+0 & 0+4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & 3\\ 21 & 6\end{bmatrix}, \text{ decir,}$$

$$B^2-3A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 0 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & 3\\ 21 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -5\\ -21 & -2\end{bmatrix}$$

La respuesta correcta es la opción c)

6. El rango de la matriz $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ **es:**

A) 3×3 **;** **B) 0 ;** **C) 3 ;** **D) 2**

(Convocatoria septiembre 2004. Examen tipo F)

SOLUCIÓN:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Hemos intercambiado la 2ª y la 3ª fila

Después de aplicar el método de Gauss, el número de filas no nulas es 2.

El rango de matriz es 2.

La respuesta correcta es la opción D)

7. Comprueba que la matriz $A=\begin{bmatrix} senx & -\cos x \\ \cos x & senx \end{bmatrix}$ es ortogonal.

SOLUCIÓN:

Una matriz cuadrada es ortogonal cuando al multiplicarla por su traspuesta da la matriz unidad; es decir, si $A.A^t = I$, entonces A es ortogonal.

$$\begin{bmatrix} senx & -\cos x \\ \cos x & senx \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} senx & \cos x \\ -\cos x & senx \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} sen^2x+\cos^2 x & senx.\cos x-\cos x.senx \\ \cos x.senx-senx.\cos x & \cos^2 x+sen^2x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hemos obtenido la matriz unidad.

8. Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3X-2Y=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \\ X+3Y=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Primer paso: multiplicamos la segunda ecuación por -3:

$$\begin{cases} 3X-2Y=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \\ -3X-9Y=\begin{pmatrix} -18 & -36 \\ 6 & -81 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sumando: $-11Y=\begin{pmatrix} -11 & -33 \\ 22 & -77 \end{pmatrix} \Rightarrow 11Y=\begin{pmatrix} 11 & 33 \\ -22 & 77 \end{pmatrix}$. Y despejando Y,

$$Y=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & 33 \\ -22 & 77 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por 2:

$$\begin{cases} 9X-6Y=\begin{pmatrix} 21 & 9 \\ 48 & 12 \end{pmatrix} \\ 2X+6Y=\begin{pmatrix} 12 & 24 \\ -4 & 54 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sumando: $11X=\begin{pmatrix} 33 & 33 \\ 44 & 66 \end{pmatrix}$. Despejando X se obtiene: $X=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 33 & 33 \\ 44 & 66 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Solución: $X=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$