MATEMÁTICAS ESPECIALES. JUNIO 2008. MODELO A

1. ¿Cuántas palabras de 5 letras, con o sin sentido, se pueden formar con dos aes, una pe y dos eses (por ejemplo, aapss)?

A) 10
B) 30
C) 20
D) 120

SOLUCIÓN:

Estamos en un caso de permutaciones.

El número de permutaciones de m elementos es: $m! = m.(m-1).(m-2).....3.2.1$
El número de permutaciones de m elementos donde uno de ellos se repite n veces y otro se repite p veces es $\dfrac{m!}{n!\,p!}$

En el caso que nos ocupa tenemos 5 letras de las cuales 2 son aes y otras 2 son eses:
El número de palabras que pueden formarse es $\dfrac{5!}{2!\,2!} = \dfrac{5.4.3.2.1}{2.1.2.1} = 30$

La opción B) es la correcta.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que al coger una de las palabras anteriores que empiezan por "a", la palabra tenga sentido?

A) 1/5
B) 1/12
C) 1/10
D) 1/60

SOLUCIÓN:

Primeramente hemos de calcular cuántas palabras empiezan por a:
Si queremos que empiecen por a, tenemos 4 letras para ordenar de las cuales 2 son eses, por tanto,
Número de palabras que empiezan por a: $\dfrac{4!}{2!} = \dfrac{4.3.2.1}{2.1} = 12$
Para calcular la probabilidad buscada hemos de aplicar la ley de Laplace:

$$\text{Prob. de un suceso} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos favorables}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos posibles}}$$

Casos favorables: 1 (sólo hay una palabra que tenga sentido: aspas)

$$\text{Prob. de que la palabra tenga sentido} = \frac{1}{12}$$

La opción B) es la correcta.

3. Discuta el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 7 \\ 5x - 3y - 2z = 1 \\ x + 4y + 7z = -2 \end{cases}$$

A) Compatible determinado
B) Compatible indeterminado
C) Incompatible
D) Ninguna de las anteriores.

SOLUCIÓN:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficiente:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -63 - 4 + 20 + 3 + 24 - 70 = 47 - 137 = -90 \neq 0$$

Como el determinante es distinto de cero el rango es 3.
Rango de la matriz de coeficientes: 3.
El rango de matriz ampliada es también 3.
Además, el número de incógnitas es 3.

Sistema compatible determinado.

La opción A) es la correcta.

4. ¿Cuál es el coseno del ángulo formado entre las rectas: $r: x - y = 3$ **y** $s: 3x + y = 0$**?**

A) $\sqrt{5}/5$
B) $1/2$
C) 1
D) $\sqrt{3}/2$

SOLUCIÓN:

Hallamos un vector director de cada recta:
Vector de r: $u = (1,1)$
Vector de s: $v = (-1, 3)$
Hemos tenido en cuenta que, dada una recta $Ax + By + C = D$, un vector director de la misma es $(-B, A)$

Si hallamos el producto escalar de los vectores obtenidos resulta:

$u.v = |u|.|v|.\cos\alpha$

De dicha fórmula,

$$\cos\alpha = \frac{u.v}{|u|.|v|} = \frac{1.(-1)+1.3}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

La opción A) es la correcta.

5. ¿Cuál es el seno del ángulo formado entre las rectas: $r: x-y=3$ y $s: 3x+y=0$?

A) $\sqrt{3}/2$

B) 0

C) $2\sqrt{5}/5$

D) $1/2$

SOLUCIÓN:

Como se trata de las mismas rectas del ejercicio anterior y ya hemos obtenido $\cos\alpha$, podemos obtener el valor del seno aplicando la ecuación fundamental de la trigonometría:

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$sen^2\alpha + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 \Rightarrow sen^2\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, por tanto, $sen\alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

La opción C) es la correcta.

6. El valor de $\lim_{x\to 4} f(x) = \frac{x^2-8x+16}{2x-8}$ es:

A) 2

B) ∞

C) 0

D) 1

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{2x-8} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^2}{2(x-4)} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{2} = \frac{4-4}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

La opción C) es la correcta.

7. El estudio de la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-8x+16}{2x-8} & si\ \ x<4 \\ 1 & si\ \ x=4 \\ \sqrt{x+2} & si\ \ x>4 \end{cases}$$

Permite afirmar que f es:

A) Continua en (1, 4)

B) Discontinua en (0, 1)

C) Discontinua en x = –2

D) Continua en x = 4

<u>SOLUCIÓN:</u>

Para valores menores que 4, la función racional. Las funciones racionales son continuas en todo R excepto en los puntos donde el denominador se anula. El denominador se anula en $x=4$ pero dicho punto no pertenece al intervalo $(1,4)$

La opción A) es correcta.

8. El valor de $\int_2^4 \frac{x^3-x^2-8x+12}{x^2-4x+4}dx$ es:

A) 10

B) 18

C) 26

D) 12

<u>SOLUCIÓN:</u>

Hacemos la división

Y es exacta.

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{x^3} & -x^2 & -8x & +12 & x^2-4x+4 \\ \cancel{-x^3} & +4x^2 & -4x & & \hline x+3 \\ \hline & \cancel{3x^2} & \cancel{-12x} & \cancel{+12} & \\ & \cancel{-3x^2} & \cancel{+12x} & \cancel{-12} & \\ \hline & & 0 & & \end{array}$$

Por tanto,

$$\int_2^4 \frac{x^3-x^2-8x+12}{x^2-4x+4}dx = \int_2^4 (x+3)dx = \left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_2^4 = \left(\frac{16}{2}+12\right)-\left(\frac{4}{2}+6\right) = 20-8=12$$

La opción D) es la correcta.

9. la función $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$ verifica:

A) Es derivable y $f'(x)=\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{3}{2}x^2+x$

B) Es derivable y $f'(x)=3x^2+6x+3$

B) No es derivable.

C) No es continua.

SOLUCIÓN:

Toda función polinómica es siempre derivable y es claro que su derivada es

$f'(x)=3x^2+6x+3$

La opción B) es la correcta.

10. La función $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$ verifica:

A) f es creciente en $(-\infty,-1)$

B) x = –1 es un máximo.

C) En $(-6,6)$ es cóncava.

D) x = –1 es un punto de inflexión.

SOLUCIÓN:

Comprobamos si se verifica la opción D):

Si una función tiene un punto de inflexión, la segunda derivada se anula en dicho punto.

$f'(x)=3x^2+6x+3$

$f''(x)=6x+6$; $\quad f''(-1)=6.(-1)+6=0$

Como la segunda derivada se anula en el punto x = –1, dicho punto es de inflexión.

La opción D) es la correcta.