FUNCIONES

1. Si $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ $para\ x\neq -1$ **y** $g(x)=2x-5,$ **entonces:**

A) $g\circ f(x)=\dfrac{-15x-11}{x+1},\ para\ x\neq -1$

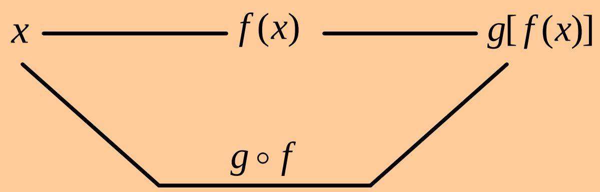
B) $g\circ f(x)=\dfrac{2x-5}{x+1},\ para\ x\neq -1$

C) $g\circ f(x)=\dfrac{1}{2x+2},\ para\ x\neq -1$

D) $g\circ f(x)=\dfrac{-5x-3}{x+1},\ para\ x\neq -1$

(Convocatoria septiembre 2002. Examen tipo B)

La composición de funciones es una operación totalmente distinta a la suma, producto y cociente:



La función *f* asigna a cada valor *x* el valor de *f*(*x*)
La función *g* asigna a cada *f*(*x*) el valor de *g*[*f*(*x*)]

Se denomina función compuesta de *f* y *g* a la función $g\circ f$ que asigna directamente a cada *x* el valor de *g*[*f*(*x*)]. $g\circ f(x)==g[f(x)]$

SOLUCIÓN:

$$g\circ f(x)=g[f(x)]=g\left(\frac{1}{x+1}\right)=2.\frac{1}{x+1}-5=\frac{2}{x+1}-5=\frac{2-5(x+1)}{x+1}=\frac{-5x-3}{x+1}$$

La opción D) es la correcta.

2. Sean $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ $para\ x\neq -1$ **y** $g(x)=x^2+2x,$ **entonces:**

A) $g\circ f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+1},\ para\ x\neq -1$

B) $g\circ f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$, *para* $x\neq -1$

C) $g\circ f(x)=\dfrac{x^3+2x}{x+1}$, *para* $x\neq -1$

D) $g\circ f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{(x+1)^2}$, *para* $x\neq -1$

(C0nvocatoria septiembre 2003. Examen tipo G)

SOLUCIÓN:

$$g\circ f(x)=g[f(x)]=g\left(\frac{x}{x+1}\right)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+2.\frac{x}{x+1}=\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{2x}{x+1}=\frac{x^2+2x(x+1)}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{x^2+2x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{3x^2+2x}{(x+1)^2}$$

La opción D) es la correcta.

3. Sean $f(x)=3x^2+2$ **y** $g(x)=2x+3$

A) $f\circ g(x)=12x^2+36x+29$

B) $f\circ g(x)=6x^3+4x+6$

C) $f\circ g(x)=3x^2+2x+6$

D) $f\circ g(x)=6x^3+9x^2+4x+6$

(Convocatoria junio 2005. Examen tipo D)

SOLUCIÓN:

$$f\circ g(x)=f[g(x)]=f(2x+3)=3(2x+3)^2+2=3(4x^2+12x+9)+2=12x^2+36x+29$$

La opción A) es la correcta.

4. Sean $f(x)=x^2+1$ **y** $h(x)=3x-2$. **La expresión** $h\circ f$ **(función compuesta) es:**

A) $9x^2-3$ **B)** $6x^2+1$ **C)** $3x^2-3$ **D)** $3x^2+1$

SOLUCIÓN:

$$h\circ f(x)=h[f(x)]=h(x^2+1)=3.(x^2+1)-2=3x^2+1$$

La opción D) es la correcta.

5. Sea $f: R-\{4\} \to R-\{1\}$ **la función definida por** $f(x)=\dfrac{x+4}{x-4}$, **entonces** $f^{-1}(x)$

vale:

A) $\dfrac{x+1}{2(x-1)}$ **B)** $\dfrac{4(x+1)}{x-1}$ **C)** $\dfrac{x+1}{x-1}$ **D)** $\dfrac{x-4}{x+4}$

(Convocatoria junio 2002. Examen tipo H)

SOLUCIÓN:

Para el cálculo de la función inversa, se procede de la siguiente manera:

$\Rightarrow$ Hacemos $f(x)=y$

$\Rightarrow$ Intercambiamos la x con la y.

$\Rightarrow$ Despejamos la y.

La función dada es: $f(x)=\dfrac{x+4}{x-4}$,

Hacemos $f(x)=y$: $y=\dfrac{x+4}{x-4}$

Intercambiamos la x con la y: $x=\dfrac{y+4}{y-4}$

Despejamos la y:

Quitamos denominadores: $xy-4x=y+4$; $xy-y=4+4x$; $y(x-1)=4+4x$

$$y=\frac{4+4x}{x-1}=\frac{4(1+x)}{x-1}=\frac{4(x+1)}{x-1}$$

La función inversa es: $y=\dfrac{4(x+1)}{x-1}$, o bien, $\boxed{f^{-1}(x)=\dfrac{4(x+1)}{x-1}}$

La opción B) es la correcta.

6. Sea $f: R-\{4\} \to R-\{0\}$ **la función definida por** $f(x)=\dfrac{5}{x-4}$, **entonces** $f^{-1}(x)$

vale:

A) $\dfrac{-4x+5}{x}$ **B)** $\dfrac{5x+4}{x}$ **C)** $\dfrac{x-4}{5}$ **D)** $\dfrac{4x+5}{x}$

(Convocatoria junio 2005. Examen tipo J)

SOLUCIÓN:

La función dada es: $f(x)=\dfrac{5}{x-4}$,

Hacemos $f(x)=y$: $y=\dfrac{5}{x-4}$

Intercambiamos la *x* con la *y*: $x=\dfrac{5}{y-4}$

Despejamos la y: $xy-4x=5$; $xy=5+4x$; $y=\dfrac{5+4x}{x}=\dfrac{4x+5}{x}$

La función inversa es: $y=\dfrac{4x+5}{x}$, o bien, $\boxed{f^{-1}(x)=\dfrac{4x+5}{x}}$

La opción D) es la correcta.

7. El dominio de definición de la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^3+x^2-2x}}$ **es:**

A) $[0,+\infty)$

B) $(-\infty,-2)\cup(-2,-1]\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

C) $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup[1,+\infty)$

D) $(-\infty,-2)\cup[-1,0)\cup(1,+\infty)$

(Convocatoria junio 2003. Examen tipo A)

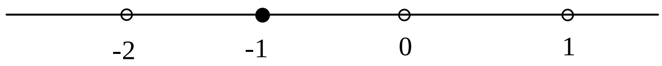
SOLUCIÓN:

Como se trata de una función irracional, el radicando tiene que ser igual o mayor que cero, ya que no existe la raíz cuadrada de los números negativos.

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-2x}\geq 0; \qquad \frac{x+1}{x(x^2+x-2)}\geq 0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$$

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}\geq 0$$



Damos un valor arbitrario a x dentro de cada uno de los intervalos obtenidos:

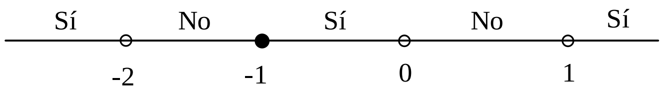
$x=-3: \dfrac{(-)}{(-)(-)(-)}=+$ (El intervalo $(-\infty,-2)$ sí es del dominio de la función).

$x=-1,5: \dfrac{(-)}{(-)(-)(+)}=-$ (El intervalo $(-2,-1]$ no es del dominio de la función)

$x=-0,5: \dfrac{(+)}{(-)(-)(+)}=+$ (El intervalo $[-1,0)$ sí es del dominio de la función)

$x=0,5: \dfrac{(+)}{(+)(-)(+)}=-$ (El intervalo $(0,1)$ no es del dominio de la función.)

$x=2: \dfrac{(+)}{(+)(+)(+)}=+$ (El intervalo $(1,+\infty)$ sí es del dominio de la función)



El dominio de definición de la función es, por tanto, el siguiente:

$Dom(f)=(-\infty,-2)\cup[-1,0)\cup(1,+\infty)$

La opción D) es la correcta.

8. El dominio de definición de la función $f(x)=\sqrt{x^3+3x^2-4x}$ es:

A) $(-\infty,-4)\cup[0,1)$

B) $[0,+\infty)$

C) $(-\infty,-4]\cup[1,+\infty)$

D) $[-4,0]\cup[1,+\infty)$

SOLUCIÓN:

El radicando tiene que ser igual o mayor que cero, es decir,

$x^3+3x^2-4x\geq 0 \quad \Rightarrow x(x^2+3x-4)\geq 0$

Para terminar de factorizar resolvemos la ecuación $x^2+3x-4=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4(-4)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}=\begin{cases}1\\-4\end{cases}$$

La inecuación factorizada queda de la siguiente forma: $x(x-1)(x+4)\geq 0$

$-4 \qquad 0 \qquad 1$

A continuación tomamos un punto arbitrario de cada intervalo y estudiamos el signo de la desigualdad en cada caso:

$x=-5:\ (-)(-)(-)=-$ (No se verifica)

$x=-1:\ (-)(-)(+)=+$ (Sí se verifica)

$x=0{,}5:\ (+)(-)(+)=-$ (No se verifica)

$x=2:\ (+)(+)(+)=+$ (Sí se verifica)

No Sí No Sí

$-4 \qquad 0 \qquad 1$

El dominio de la función es: $Dom(f)=[-4,0]\cup[1,+\infty)$

La opción D) es la correcta.

9. Halla el dominio de las siguientes funciones:

A) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x^2-3x}$**;** **B)** $g(x)=\dfrac{2x^3-5}{x^2+2}$

<u>SOLUCIÓN:</u>

A) Se trata de una función racional y hemos de saber que el dominio de toda función racional es R menos los puntos que anulan el denominador.

$$x^2-3x=0; \quad x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

El denominador se anula para $x = 0$ y para $x = 3$

Por tanto, $Dom(f)=R-\{0,3\}$

B) En este caso se trata también de una función racional luego buscamos los puntos que anulan el denominador:

$x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2 \Rightarrow x=\sqrt{-2}$ (Los números negativos no tienen raíz cuadrada.)

Ello significa que no hay solución y entonces el denominador no se anula nunca.

No hay que restar nada a R.

$Dom(g)=R$

10. Para qué valor de a la función $f(x)=\begin{cases}2x+a & si \quad x\le 1\\ x^2-ax+2 & si \quad x>1\end{cases}$

es continua en todo R:

A) $a=\frac{2}{3}$ **B)** $a=\frac{1}{2}$ **C)** $a=\frac{1}{3}$

(Convocatoria junio 2001. Examen tipo G)

SOLUCIÓN:

Se trata de una función definida a trozos.

Cada trozo es una función polinómica. Las funciones polinómicas son siempre continuas.

El único punto que tenemos que estudiar es el punto donde cambia la definición. A la izquierda de 1 la función se llama $2x+a$ y a la derecha de 1 se llama x^2-ax+2

Límite de la función a la izquierda de 1:

$$\lim_{x\to 1^-}(2x+a)=2.1+a=2+a$$

Límite de la función a la derecha de 1:

$$\lim_{x\to 1^+}(x^2-ax+2)=1^2-a.1+2=3-a$$

Para que sea continua los límites laterales tienen que ser iguales; por tanto, $2+a=3-a$

$$2a=1\Rightarrow\ a=\frac{1}{2}$$

La opción B) es la correcta.

11. El estudio de la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x-2}{x^2-x-2}$ **permite afirmar:**

A) ***f*** **es continua en** $R-\{-1,2\}$

B) ***f*** **es continua en** $x=-1$

C) ***f*** **es continua en todo R**

(Convocatoria junio 2001. examen tipo I)

SOLUCIÓN:

Hallamos los puntos donde el denominador se anula:

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

En los puntos 2 y -1 la función no existe. En los demás puntos la función existe y es continua. *f* es continua en $R - \{-1, 2\}$

La opción A) es la correcta.

12. El estudio de la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 5 - x & si \quad x \leq 2 \\ 2x - 3 & si \quad x > 2 \end{cases}$ **permite afirmar:**

A) *f* es continua en x = 1.

B) *f* es continua en x = 2.

C) *f* no es continua en x = 0.

D) *f* es continua en todo R.

(Convocatoria junio 2005. Examen tipo D)

SOLUCIÓN:

El único punto dudoso es x = 2. En los demás puntos la función es continua por ser polinómica.

$$\lim_{x \to 2^-} (5 - x) = 5 - 2 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} (2x - 3) = 2.2 - 3 = 1$$

Los límites laterales existen pero no son iguales luego la función no es continua en $x = 2$

La opción A) es verdadera y todas las demás son falsas.

La opción A) es la correcta.

13. ¿Para qué valor de a la función $f(x) = \begin{cases} x + 3 & si \quad x \leq 2 \\ ax + 6 & si \quad x > 2 \end{cases}$ **es continua en todo R?**

A) 3 **B) 2** **C) -1/2** **D) 1.**

(Convocatoria 2005. Examen tipo J)

SOLUCIÓN:

Los límites laterales en el punto x = 2, tienen que ser iguales:

$\lim\limits_{x\to 2^-}(x+3)=2+3=5$

$\lim\limits_{x\to 2^+}(ax+6)=a.2+6=2a+6$

Igualando, $2a+6=5\Rightarrow 2a=-1\Rightarrow a=\dfrac{-1}{2}$

La opción C) es la correcta.

14. La función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<1 \\ x^2-2x+\dfrac{3}{2} & si \quad 1\le x \end{cases}$ **verifica:**

A) No es continua en x = 0.

B) Es continua en x = 1.

C) Es continua en $R-\{1\}$

D) Es continua en todo R.

SOLUCIÓN:

El punto a estudiar es x = 1. En los demás puntos es continua pues se trata de dos trozos de funciones polinómicas.

$\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=1^2+1=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-2x+\dfrac{3}{2})=1^2-2.1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$

Existen los límites laterales pero no son iguales; por tanto la función no es continua en $x=1$

Es continua en $R-\{1\}$

La opción C) es la correcta.

15. El estudio de las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-4}$ **permite afirmar:**

A) $x=4$ **es una asíntota horizontal.**

B) La recta $y=3$ **es una asíntota horizontal por ambos lados.**

C) La recta $x=3$ **es una asíntota horizontal por ambos lados.**

D) En el punto $x=-\frac{2}{3}$ existe una asíntota vertical.

(Convocatoria junio 2003. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

En algunas ocasiones, la gráfica de una curva, cuando se aleja del origen, se parece a una recta. Estas rectas, a las que la curva se parece, reciben el nombre de asíntotas. Pueden ser verticales, horizontales y oblicuas.

Asíntotas verticales: Se obtienen igualando el denominador a cero y resolviendo la ecuación resultante. Si la función es $f(x)=\frac{3x+2}{x-4}$

$x-4=0 \Rightarrow x=4$

La recta $x=4$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: Se halla el límite de la función cuando $x \to \infty$.

Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=k$, entonces la recta $y=k$ es una asíntota horizontal.

$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{x-4}=\frac{3}{1}=3.$

La recta $y=3$ es una asíntota horizontal por ambos lados.

La opción B) es la correcta.

16. El estudio de la función $f(x)=\frac{5x+2}{x-4}$ permite afirmar que una asíntota horizontal de la función f es la recta:

A) $y=4$ **B)** $y=5$ **C)** $y=\frac{2}{5}$ **D)** $y=-\frac{2}{5}$

SOLUCIÓN:

Para hallar las asíntotas horizontales se halla el límite de la función cuando $x \to \infty$, por tanto, $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+2}{x-4}=\frac{5}{1}=5$. La recta $y=5$ es una asíntota horizontal.

La opción B) es la correcta.

17. La función $f(x)=\dfrac{2x+5}{3x-6}$ verifica:

A) Tiene una asíntota vertical.

B) Tiene asíntotas oblicuas.

C) No tiene asíntota horizontal.

D) Ninguna de las anteriores respuestas.

(Convocatoria septiembre 2004. Examen tipo G)

SOLUCIÓN:

Comprobamos la opción A):

$3x-6=0 \Rightarrow x=\dfrac{6}{3}=2; \quad x=2$ es una asíntota vertical.

No es necesario continuar.

La opción A) es la correcta.

18. ¿Para qué valor de k la función $f(x)=\begin{cases} k \quad si \quad x=2 \\ \dfrac{x^2-4}{x^3-8} \quad si \quad x\neq 2 \end{cases}$ es continua en R?

A) 2 **B) $\dfrac{1}{3}$** **C) 4** **D) $\dfrac{1}{2}$**

(Convocatoria junio 2003. Examen tipo J)

SOLUCIÓN:

Para que una función sea continua en un punto, el límite de la función tiene que coincidir con el valor de la función en el punto considerado.

El punto de continuidad que hay que estudiar es x = 2, que es donde se anula el denominador.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\frac{0}{0}(\text{indeterminac.})=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2+2x+4}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Como el límite es $\dfrac{1}{3}$, el valor de la función tiene que ser también $\dfrac{1}{3}$, por tanto,

$$f(2)=k=\frac{1}{3}$$

La opción B) es la correcta.

19. El estudio de las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{3x+9}$ permite afirmar:

A) En el punto $x=\dfrac{1}{2}$ existe una asíntota vertical.

B) $x+3=0$ es una asíntota horizontal de *f*

C) $x+3=0$ es una asíntota vertical de *f*

D) En el punto $x=-3$ existe una asíntota horizontal.

(Convocatoria septiembre 2003. Examen tipo B)

SOLUCIÓN:

Calculamos las asíntotas verticales: $3x+9=0;\quad x=\dfrac{-9}{3};\quad x=-3$ es una asíntota vertical que podemos expresar también como $x+3=0$

La opción C) es la correcta.

20. Calcula $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

SOLUCIÓN:

En primer lugar sustituimos la x por 1: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}=\dfrac{1^2-1}{1^3-1}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminación)

Para quitar la indeterminación tenemos que factorizar numerador y denominador y simplificar la fracción.

Factorización del numerador: $x^2-1=(x-1)(x+1)$

Factorización del denominador:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \downarrow & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{1+1}{1^2+1+1}=\frac{2}{3}$$