MATEMÁTICAS ESPECIALES. JUNIO 2009. MODELO A

1. El límite de $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ en x = 3 es igual a:

A) $+\infty$
B) $-\infty$
C) 0
D) No existe

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \to 3^+ \\ -\infty & \text{si } x \to 3^- \end{cases}$$

Existen los límites laterales pero, como no son iguales, no existe límite en x=3

2. La función $f(x) = 2x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 6x$ verifica:

A) Es derivable y su 2ª derivada es $f''(x) = 8x^3 - x^2 + 6$
B) Es derivable y su 2ª derivada es $f''(x) = 24x^2 - 2x$
C) No es derivable.
D) No es continua.

$$f(x) = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 6x$$

$$f'(x) = 8x^3 - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 6 = 8x^3 - x^2 + 6$$

$$f''(x) = 24x^2 - 2x$$

3. La función $f(x) = 4x - \dfrac{4}{3}x^3$ es creciente en el intervalo

A) $(-\infty, 1)$
B) $(-\infty, -1)$
C) $(-1, +\infty)$
D) $(-1, 1)$

$$f(x) = 4x - \frac{4}{3}x^3$$

$$f'(x) = 4 - 3\cdot\frac{4}{3}x^2 = 4 - 4x^2$$

$$4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$

Signo de la derivada en el intervalo $(-1, 1)$

Para $x = 0$, $f'(0) = 4 - 4\cdot 0^2 = 4 > 0$

La función es creciente en el intervalo $(-1, 1)$

4. El estudio de la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 8x + 16}{2x - 8} & si\ \ x < 4 \\ 1 \ \ si\ \ x = 4 \end{cases}$

Permite afirmar:

A) Discontinua en $(0,1)$

B) Es continua en $(1,4)$

C) Discontinua en $x = -2$

D) Continua en x = 4

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2 - 8x + 16}{2x - 8} = \lim_{x\to 4^-} \frac{(x-4)^{\cancel{2}}}{2\cancel{(x-4)}} = \lim_{x\to 4^-} \frac{x-4}{2} = 0$$

La función es continua en todos los puntos de su dominio menos en $x = 4$.

Esto no contradice la opción B) que dice que es continua en $(1, 4)$.

5. El valor de la integral $\int_0^1 \frac{2x}{(x^2-2)^3}\,dx\ es:$

A) − 3/8

B) − 5/8

C) − 1/8

D) 0

$$I = \int \frac{2x}{(x^2-2)^3}\, dx$$

$$x^2 - 2 = t; \quad 2x\, dx = dt$$

$$I = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}\, dt = \frac{t^{-2}}{-2} = \frac{1}{-2t^2} = \frac{1}{-2(x^2-2)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2-2)^3}\, dx = \left[\frac{1}{-2(x^2-2)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{-2\cdot 1} - \frac{1}{-2\cdot 4} =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1-4}{8} = \frac{-3}{8}$$

6. Discuta el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x - 4y + z = 0 \\ 3x - 4y - z = 0 \end{cases}$$

A) Compatible determinando.

B) Compatible indeterminado.

C) Incompatible

D) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 12 + 36 + 4 - 2 = 60 \neq 0$$

Rango de la matriz de coeficientes: 3

Rango de la matríz ampliada: 3

Número de incognitas: 3

Sistema compatible determinado según el teorema de Rouché.

7. Si la $\operatorname{cotg}(\alpha) = \sqrt{3}/3$ y α es un ángulo del primer cuadrante, ¿cuánto vale sen(α)?

A) 1

B) $1/2$

C) $\sqrt{3}/2$

D) $\sqrt{2}/2$

$$1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

$$1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

$$1 + \frac{3}{9} = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

$$\frac{4}{3} = \operatorname{cosec}^2\alpha \; ; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nota: para tener en cuenta la nota de la Prueba del Tutor hay que dejar en blanco estas tres últimas preguntas. Si no ha realizado la Prueba del Tutor responda a las 10 preguntas.

8. Un vendedor quiere visitar 5 ciudades (por ejemplo, Albacete, Barcelona, Córdoba, Denia, y Estepona). Si no quiere repetir ciudades, ¿cuántas rutas distintas puede elaborar si puede empezar y acabar en cualquiera de las ciudades?.

A) 5

B) 15

C) 120

D) 3125

El número de rutas son las distintas permutaciones que pueden realizarse con 5 elementos.

$$P(5) = 5.4.3.2.1 = 120$$

9. ¿A qué número complejo es igual $\dfrac{(i^7-2)(i-1)}{i+1}$?

A) 1 – 2i
B) – 1 – 2i
C) – 1 – i
D) 1 – i

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \qquad i^7 = i^3 = i^2 . i = -1 . i = -i$$

$$\frac{(i^7-2)(i-1)}{i+1} = \frac{(-i-2)(i-1)}{i+1} = \frac{-i^2+i-2i+2}{i+1} =$$

$$= \frac{3-i}{i+1} = \frac{(3-i)(i-1)}{(i+1)(i-1)} = \frac{3i-3-i^2+i}{i^2-1} =$$

$$= \frac{-2+4i}{-2} = 1-2i$$

10 ¿Qué recta pasa por el punto P(2, 1) y es paralela a la recta r: x + 5y + 1 = 0 ?
A) – x + 5y – 3 =0
B) x + 5y – 7 =0
C) x – 5y +3 =0
D) 5x –y – 9 =0

Dos rectas paralelas tienen los coeficientes proporcionales.
La única que los tiene es $x+5y-7=0$
Veamos si pasa por el punto (2, 1):

$2+5.1-7=0$. Si pasa por dicho punto.