DETERMINANTES

1. Calcula el determinante de la siguiente matriz:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&2&3\\1&2&4\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&2&3\\1&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&0&2\\0&0&3\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}0&2\\0&3\end{vmatrix}=1.(3.0-2.0)=1.0=0$$

Hemos sumado a la segunda fila la primera cambiada de signo.
A continuación hemos sumado a la tercera fila la primera cambiada de signo.
Después lo hemos desarrollado por los adjuntos de la primera columna llegando a un determinante de orden 2 cuyo cálculo es muy sencillo.

2. Resuelve el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix}1&-2&3\\4&5&6\\-7&8&10\end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Tomamos como positivos los siguientes productos: $\begin{vmatrix}1&-2&3\\4&5&6\\-7&8&10\end{vmatrix}$

Y negativos estos otros: $\begin{vmatrix}1&-2&3\\4&5&6\\-7&8&10\end{vmatrix}$

Es decir, $\begin{vmatrix}1&-2&3\\4&5&6\\-7&8&10\end{vmatrix}=1.5.10+(-2).6.(-7)+3.4.8-3.5.(-7)-6.8.1-10.4.(-2)=$

$=50+84+96+105-48+80=367$

3. El determinante de la matriz $A=\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\0&3&2&-2\\2&4&2&1\\3&1&5&4\end{bmatrix}$ **es:**

A) 4×4. **B) 30.** **C) −158.** **D) 2.**

SOLUCIÓN:

Hacemos en primer lugar las siguientes transformaciones:

1º . A la tercera fila le sumamos la primera multiplicada por – 2.
2º. A la cuarta fila le sumamos la primera multiplicada por – 3.

El determinante queda de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

Hemos aplicado la siguiente propiedad:

Si a una fila o columna le sumamos otra multiplicada por un número, el valor del determinante no varía.

Ahora lo desarrollamos por los adjuntos de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{2} \\ \cancel{0} & 3 & 2 & -2 \\ \cancel{0} & 4 & 4 & -3 \\ \cancel{0} & 1 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 3.4.(-2) + 2.(-3).1 + (-2).4.8 - 4.1.(-2) - 8.(-3).3 - 4.2.(-2) =$$

$= -24 - 6 - 64 + 8 + 72 + 16 = 2$ (Hemos aplicado finalmente a regla de Sarrus)

La opción correcta es la D)

4. La matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$**, con *a, b, c* y *d* números reales, es:**

A) $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ **B)** $ad - bc$ **C)** $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} a.d & c \\ b & 1 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

Hallamos los adjuntos de cada uno de los elementos de la matriz dada:

$A_{11} = d \qquad A_{12} = -c$

$A_{21} = -b \qquad A_{22} = a$

Matriz adjunta: $Adj(A) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

La opción correcta es la A)

PARA RECORDAR: Adjunto de un elemento de una matriz es el determinante de la matriz que resulta al suprimir la fila y la columna a la que pertenece el elemento, precedido del signo + o – según que la suma de la fila y la columna sea par o impar.

5. Halla la matriz adjunta de $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

Se obtiene formando una matriz con todos los adjuntos:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-17; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1; \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-1; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=-10;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-8; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=7$$

Matriz adjunta: $Adj(A)=\begin{bmatrix} -17 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & -10 \\ 4 & -8 & 7 \end{bmatrix}$

6. El rango de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **es:**

A) 3×3. **B) 0.** **C) 3.** **D) 2**

SOLUCIÓN:

Los determinantes sirven también para hallar el rango de una matriz.
Se procede de la forma siguiente:
Hallamos el determinante. Si es distinto de 0, el rango es 3, es decir, el orden de la matriz.
Si es 0, buscamos todos los determinantes de orden 2 que pueden formarse con los elementos de la matriz dada. Si alguno de ellos es distinto de 0, el rango es 2. Y así sucesivamente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0+1+0-1-0-0=0$$ El rango no puede ser 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Puede formarse un determinante de orden 2 distinto de cero. El rango es 2

La opción correcta es la D)

7. Calcula el rango de la siguiente matriz: $A=\begin{bmatrix}3&3&3&3&1\\4&4&4&4&-3\end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

Es claro que una matriz de dos filas tendrá de rango 1 ó 2.
Buscando matrices de orden 2 que pueden formarse, vemos que podemos encontrar una, la señalada en el cuadro de color rojo, cuyo determinante es distinto de cero; por tanto, el rango es 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}3&3&3&\boxed{\begin{matrix}3&1\\4&-3\end{matrix}}\end{array}\right.\quad\text{i.e.}\quad\begin{bmatrix}3&3&3&3&1\\4&4&4&4&-3\end{bmatrix}$$

Solución: $rang(A)=2$

8. Halla la matriz inversa de $A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

Dada una matriz cuadrada *A* cuyo determinante es ≠0, matriz inversa de *A* es la matriz que multiplicada por ella da la matriz identidad. Se expresa por A^{-1}.

Para calcularla procedemos de la siguiente forma:

1º. Calculamos el determinante de A: $\begin{vmatrix}2&1\\-1&0\end{vmatrix}=2.0-1.(-1)=1$

2º. Hallamos los adjuntos de la matriz dada:

$$A_{11}=0;\qquad A_{12}=-(-1)=1$$
$$A_{21}=-1;\qquad A_{22}=2$$

Matriz adjunta de A: $Adjunta(A)=\begin{bmatrix}0&1\\-1&2\end{bmatrix}$

3º. La inversa se obtiene tomando la traspuesta de la matriz adjunta obtenida y dividiendo por el determinante de *A*:

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$$

Solución: $A^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$

Podemos comprobar que A multiplicada por su inversa A^{-1}, da la matriz identidad:

$$\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.0+1.1&2.(-1)+1.2\\(-1).0+0.1&(-1).(-1)+2.0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

Muy importante: para que exista inversa de *A* su determinante tiene que ser distinto de cero.

9. Resuelve por la regla de Cramer el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 3x+2y=-5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Es necesario conocer los siguientes determinantes:
Determinante del sistema: Es el formado por los coeficientes de las incógnitas.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=10-9=1$$

Determinante de la incógnita *x*: Se sustituye en el determinante del sistema la columna de los coeficientes de *x* por la columna de los términos independientes:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}=4-(-15)=4+15=19$$

Determinante de la incógnita *y*: Se sustituye en el determinante del sistema la columna de los coeficientes de *y* por la columna de los términos independientes:

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-25-6=-31$$

Una vez calculados los determinantes, las soluciones serán:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{19}{1}=19\,; \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-31}{1}=-31$$

10. Halla la inversa de la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

Hallamos en primer lugar el determinante de la matriz: $|A|=1.1.2=2$

Calculamos los adjuntos de la matriz dada:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\,; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=0\,; \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4\,; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-(-1)=1; \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

La inversa se obtiene formando una matriz con los adjuntos obtenidos pero cambiando filas por columnas, y dividiendo por el determinante de *A*:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$