DERIVADAS

1. La derivada de la función $f(x)=\sqrt{1-2x}$ es:

A) $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}$ **C)** $f'(x)=1+\sqrt{-2x}$

B) $f'(x)=-2\sqrt{1-2x}$ **D)** $f'(x)=1-2x$

SOLUCIÓN:

$$f'(x)=\frac{(1-2x)'}{2\sqrt{1-2x}}=\frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{1-2x}}=\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

La opción A) es la correcta.

2. La derivada de la función $f(x)=x^2e^{-x}$ es:

A) $f'(x)=2xe^{-x}$ **C)** $f'(x)=-\dfrac{x^3}{3}e^{-x}$

B) $f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$ **D)** $f'(x)=2x+e^{-x}(-1)$

SOLUCIÓN:

$$f'(x)=2x.e^{-x}+e^{-x}(-1)x^2=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}$$

La opción B) es la correcta.

3. La derivada segunda de la función $f(x)=4^x.senx$ es:

A) $f''(x)=4^x.(\log 4.senx+\cos x)$

B) $f''(x)=4^x.senx.[(\log 4)^2-1]+2.4^x.\log 4.\cos x$

C) $f''(x)=2.4^x.\log 4.senx.\cos x$

D) $f''(x)=4^x.\log 4.\cos x$

SOLUCIÓN:

Hallamos en primer lugar la primera derivada:

$f'(x)=4^x.\log 4.senx+\cos x.4^x=\log 4.4^x.senx+\cos x.4^x$

Segunda derivada:

$f''(x)=\log 4.[4^x.\log 4.senx+\cos x.4^x]+(-senx).4^x+4^x.\log 4.\cos x$, es decir,

$f''(x)=4^x.(\log 4)^2.senx+4^x.\log 4.\cos x-4^x.senx+4^x.\log 4.\cos x=$

$=4^x.senx.[(\log 4)^2-1]+2.4^x.\log 4.\cos x$

La opción B) es la correcta.

4. La función $f(x)=(x-7)^3$ verifica:
A) En x = 7 existe un punto de inflexión.
B) En x = 7 tiene un máximo.
C) En x = 7 tiene un mínimo.
D) Es discontinua en x = 7.

SOLUCIÓN:

1º Se halla la primera derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante:

$$f(x)=(x-7)^3$$

$$f'(x)=3(x-7)^2$$

$$3(x-7)^2=0 \Rightarrow (x-7)^2=0 \Rightarrow (x-7)=0 \Rightarrow x=7$$

2º Hallamos la primera derivada que para x = 7 es distinta de cero:

$$f''(x)=2.3(x-7);\ f''(7)=0$$

$$f'''(x)=6;\quad f'''(7)=6$$

Como la primera derivada no nula es impar, existe punto de inflexión en el punto considerado.

La opción A) es la correcta.

La regla es la siguiente:
Si la primera derivada no nula es impar, existe punto de inflexión.
Si la primera derivada no nula es par, existe máximo (si negativa) o mínimo (si es positiva).

5. La función $f(x)=(x+8)^3$ verifica:
A) En x = —8 existe un punto de inflexión.
B) En x = —8 tiene un máximo.
C) En x = —8 tiene un mínimo.
D) Es discontinua en x = —8.

SOLUCIÓN:

1º Hallamos la primera derivada, la igualamos a cero y se resolvemos la ecuación resultante:

$$f(x)=(x+8)^3$$

$$f'(x)=3(x+8)^2$$

$$3(x+8)^2=0 \Rightarrow (x+8)^2=0 \Rightarrow (x+8)=0 \Rightarrow x=-8$$

2º Hallamos la primera derivada que para x = —8 es distinta de cero:

$$f''(x)=2.3(x+8);\quad f''(-8)=0$$

$$f'''(x)=6;\quad f'''(-8)=6$$

Como la primera derivada no nula es impar, existe punto de inflexión en el punto considerado.

La opción A) es la correcta.

6. La función $f(x) = x^3 - 3x$ verifica:
A) Tiene un mínimo en x = 0.
B) Es decreciente en (—∞, ∞)
C) Tiene un mínimo en x = 1.
D) Es creciente en (—∞, ∞)

SOLUCIÓN:

Hallamos la primera derivada, la igualamos a cero y se resolvemos la ecuación resultante: $f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Hallamos la segunda derivada: $f''(x) = 6x$

$f''(1) = 6.1 = 6 > 0$

Como la segunda derivada (par) es mayor que cero, existe mínimo en el punto x = 1.

La opción C) es la correcta.

7. El estudio de la función $f(x) = -x^4 + 2x^2$ permite afirmar:
A) En (—1, 0) es decreciente. **B) En (—1, 1) es decreciente**
C) *f* (0) = 1 **D) En (0, +∞) es creciente.**

SOLUCIÓN:

Hallamos la primera derivada, la igualamos a cero y se resolvemos la ecuación resultante: $f'(x) = -4x^3 + 4x$

$$-4x^3 + 4x = 0 \Rightarrow (-x^3 + x) = 0 \Rightarrow x(-x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Con los valores que anulan la primera derivada, formamos la tabla siguiente:

Intervalos	(—∞, —1)	(—1, 0)	(0, 1)	(1, +∞)
Signo de la derivada	+	—	+	—
Función	↗	↘	↗	↘

Estudiamos el signo de la derivada en un punto cualquiera de cada intervalo:

Para x = —2: $f'(-2) = -4(-2)^3 + 4(-2) = 32 - 8 = 24$ $(Positiva)$

Para x = —1/2: $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4\left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 4.\left(-\frac{1}{2}\right) = -4.\left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{4}{2} = \frac{4}{8} - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}(Negativa)$

Para x = 1/2: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4.\frac{1}{2} = -4.\frac{1}{8} + 2 = \frac{-1}{2} + 2 = \frac{3}{2}(Positiva)$

Para x = 2: $f'(2) = -4.2^3 + 4.2 = -32 + 8 = -24(Negativa)$

La opción A) es la correcta.

8. La derivada segunda de la función $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ es:

A) $f''(x)=\dfrac{-2\log x+x}{x^2}$

B) $f''(x)=\dfrac{\log^2 x-3x}{x^4}$

C) $f''(x)=\dfrac{2\log x-3}{x^3}$

(Convocatoria junio 2001. Examen tipo G)

SOLUCIÓN:

$$\text{Recordemos la derivada de un cociente:}\quad y=\frac{f}{g};\quad y'=\frac{f'.g-g'.f}{g^2}$$

Primera derivada:

Si $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-1.\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

Segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}.x^2-2x.(1-\log x)}{x^4}=\frac{-x-2x+2x\log x}{x^4}=\frac{-3x+2x\log x}{x^4}=\frac{x(-3+2\log x)}{x^4}=$$

$$=\frac{-3+2\log x}{x^3}=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

La opción C) es la correcta.

9. La función $f(x)=(x-4)^4$ verifica:

A) Tiene un máximo.

B) Tiene un mínimo.

C) Tiene un punto de inflexión.

(Convocatoria junio 2001. Examen tipo G)

SOLUCIÓN:

1º Se halla la primera derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante:

$f(x)=(x-4)^4$

$f'(x)=4(x-4)^3$

$4(x-4)^3=0 \Rightarrow (x-4)^3=0 \Rightarrow x-4=0 \Rightarrow x=4$

2º Hallamos la primera derivada que para x = 4 es distinta de cero:

$f''(x)=3.4(x-4)^2=12(x-4)^2;\quad f''(4)=0$

$f'''(x) = 2.12(x-4) = 24(x-4);\ f'''(4) = 0$
$f^{(IV)}(x) = 24;\ f^{(IV)}(4) = 24$

Como la primera derivada no nula es par y positiva, existe un mínimo en el punto x = 4.

La opción B) es la correcta.

10. La derivada segunda de la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ es:

A) $f''(x) = -x(2x - x^2)e^{-x}$
B) $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$
C) $f''(x) = (-2 + 2x + x^2)e^{-x}$

(Convocatoria junio 2001. Examen tipo I)

SOLUCIÓN:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Recordemos la derivada de un producto:}\\ y = f.g;\quad y' = f'.g + g'.f\end{array}}$$

$f(x) = x^2 e^{-x}$
Primera derivada:
$f'(x) = 2x.e^{-x} + e^{-x}(-1)x^2 = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$

Segunda derivada:
$f''(x) = (2-2x)e^{-x} + e^{-x}(-1)(2x - x^2) = (2-2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x}$
Y sacando factor común a e^{-x}, $f''(x) =$
$f''(x) = (2 - 2x - 2x + x^2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$

La opción B) es la correcta.

11. La derivada segunda de la función $f(x) = 2x^3 e^{-x}$ es:
A) $f''(x) = (2x^3 - 12x^2 + 12x)e^{-x}$
B) $f''(x) = (2x^3 - 6x^2 + 12x)e^{-x}$
C) $f''(x) = (2x^3 - 6x^2 + 12)e^{-x}$

(Convocatoria septiembre 2001. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

$f(x) = 2x^3 e^{-x}$
Primera derivada:
$f'(x) = 6x^2.e^{-x} + e^{-x}(-1).2x^3 = 6x^2e^{-x} - 2x^3e^{-x} = (6x^2 - 2x^3)e^{-x}$

Segunda derivada:

$$f''(x) = (12x - 6x^2)e^{-x} + e^{-x}(-1)(6x^2 - 2x^3) = 12xe^{-x} - 6x^2e^{-x} - 6x^2e^{-x} + 2x^3e^{-x} =$$
$$= (12x - 12x^2 + 2x^3)e^{-x}$$ (Resultado que coincide con el de la opción A)

La opción A) es la correcta.

12. El valor de $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$ es:

A) 0
B) ∞
C) 2
D) −2

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \text{(Indeterminación).}$$

Las indeterminaciones de las formas $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$ pueden resolverse aplicando la regla de L`Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

La opción A) es la correcta.

13. El valor de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4(1-\cos x)}{x}$ es:

A) 1
B) 0
C) 2
D) ∞

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4(1-\cos x)}{x} = \frac{4(1-\cos 0)}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{4-4\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-4(-senx)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{4senx}{1} = \frac{4.0}{1} = 0$$

La opción B) es la correcta.

Recordemos que $\boxed{sen 0 = 0 \ y \ \cos 0 = 1}$

14. La función $f(x)=x^3-3x$ verifica:

A) Tiene un mínimo en x = 0
B) Es decreciente en (—∞, ∞)
C) Tiene un mínimo en x = 1
D) Es creciente en (—∞, ∞)

SOLUCIÓN:

Hallamos la primera derivada, la igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante:

$f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3$

$3x^2-3=0 \quad \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

Hallamos la segunda derivada:

$f''(x)=6x$

Las raíces de la primera derivada las sustituimos en la segunda derivada. Di da positivo existe mínimo y si da negativo existe máximo:

$f''(1)=6.1=6>0 \quad \Rightarrow \exists\ mínimo\ \ para\ \ x=1$

No es necesario seguir, ya hemos obtenido una de las opciones:

La opción C) es la correcta.

15. El valor de $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x}$ es:

A) ∞
B) 1
C) —1
D) 0

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x}=\frac{1-1^3}{1}=\frac{0}{0}\text{(Indeterm.)}=\lim_{x\to 0}\frac{0-3\cos^2 x(-senx)}{1}=\lim_{x\to 0}(3\cos^2 senx)=3.1^2.0=0$$

(Hemos aplicado la regla de L`Hôpital)

La opción D) es la correcta.

15. La derivada segunda de la función $f(x)=4^x.senx$ es:

A) $f''(x)=4^x(\log 4.senx+\cos x)$

B) $f''(x)=4^x.senx.[(\log 4)^2-1]+2.4^x.\log 4.\cos x$

C) $f''(x)=2.4^x.\log 4.senx.\cos x$

D) $f''(x)=4^x.\log 4.\cos x$

SOLUCIÓN:

Recordemos que la derivada de a^x es ella misma multiplicada por el logaritmo neperiano de a. En particular, la derivada de 4^x es $4^x.\log 4$

La función dada es $f(x)=4^x.senx$

Primera derivada:

$f'(x)=4^x.\log 4.senx+\cos x.4^x=\log 4.4^x.senx+\cos x.4^x$

(Hemos aplicado la fórmula de la derivada de un producto)

Segunda derivada:

$f''(x)=\log 4.[4^x.\log 4.senx+\cos x.4^x]+(-senx).4^x+4^x.\log 4.\cos x$, es decir,

$f''(x)=4^x.senx.(\log 4)^2+4^x.\log 4.\cos x-4^x.senx+4^x.\log 4.\cos x$

Y sacando factor común, $f''(x)=4^x.senx[(\log 4)^2-1]+2.4^x.\log 4.\cos x$

La opción B) es la correcta.

16. El estudio de la función $f(x)=-x^4+2x^2$ permite afirmar:

A) En $(-1,1)$ es decreciente.

B) En $(-1,0)$ es decreciente.

C) $(0,+\infty)$ es creciente.

D) $f(0)=1$

SOLUCIÓN:

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento se obtienen igualando a cero la primera derivada y resolviendo la ecuación resultante.

$f'(x)=-4x^3+4x$

$$-4x^3+4x=0\Rightarrow -x^3+x=0\Rightarrow x(-x^2+1)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=1\Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty,-1),\ (-1,0),\ (0,1)\ y\ (1,+\infty)$

El único que coincide con los que se dan en las opciones es $(-1,0)$

Signo de la derivada en dicho intervalo:

Tomando un punto del mismo, por ejemplo, $x=-\frac{1}{2}$,

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-4\left(-\frac{1}{2}\right)^3+4\left(-\frac{1}{2}\right)=-4.\left(-\frac{1}{8}\right)-\frac{4}{2}=\frac{4}{8}-2=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}.$$

Como la derivada es negativa la función es decreciente.

La opción B) es la correcta.

17. La derivada segunda de $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ es:

A) $f''(x)=\dfrac{-2\log x+x}{x^2}$

B) $f''(x)=\dfrac{\log^2 x-3x}{x^4}$

C) $f''(x)=\dfrac{2\log x-3}{x^3}$

(Convocatoria junio 2001. Examen tipo G)

<u>SOLUCIÓN:</u>

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-1.\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{\left(0-\frac{1}{x}\right).x^2-2x.(1-\log x)}{x^4}=\frac{-x-2x+2x\log x}{x^4}=\frac{-3x+2x\log x}{x^4}=$$

$$=\frac{x(-3+2\log x)}{x^4}=\frac{-3+2\log x}{x^3}=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

La opción C) es la correcta.

18. La función $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$ es cóncava en el intervalo:

A) $(-1,1)$	**C)** $(-\infty,-1)$
B) $(-6,6)$	**D)** $(-\infty,1)$

<u>SOLUCIÓN:</u>

Se halla la segunda derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante:

$f'(x)=3x^2+6x+3$

$f''(x)=6x+6$

$6x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$

Los intervalos de concavidad y convexidad son: $(-\infty,-1)$ y $(-1,+\infty)$

El único que coincide con los intervalos que se dan en las opciones dadas es $(-\infty,-1)$

Ahora estudiamos el signo de la segunda derivada en el intervalo considerado:

Tomando un punto cualquiera de dicho intervalo, por ejemplo, −2, se obtiene:

$f''(-2)=6.(-2)+6=-6$

Como la segunda derivada es negativa, la función es cóncava.

La opción C) es la correcta.

19. La derivada de $f(x)=\log(sen^3(2x^3+4))$ **es:**

A) $18x^2\cot g(2x^3+4)$

B) $6x^2\cot g(2x^3+4)$

C) $9x^2 tg(2x^3+4)$

D) $-18tg(2x^3+4)$

(Convocatoria septiembre 2002. Examen tipo B)

<u>SOLUCIÓN:</u>

$$f'(x)=\frac{[sen^3(2x^3+4)]'}{sen^3(2x^3+4)}=\frac{3sen^2(2x^3+4).\cos(2x^3+4).6x^2}{sen^3(2x^3+4)}=3.\frac{\cancel{sen^2(2x^3+4)}.\cos(2x^3+4)}{\cancel{sen^2(2x^3+4)}.sen(2x^3+4)}.6x^2=$$

$$=18x^2\cot g(2x^3+4)$$

La opción A) es la correcta.

20. La derivada de $f(x)=\dfrac{\cos^2(\cos x)}{4}$ **es:**

A) $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(\cos x).sen(senx)$

B) $f'(x)=\dfrac{-2\cos(\cos x).senx}{4}$

C) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cos(\cos x).sen(\cos x).senx$

D) $f'(x)=-\dfrac{1}{8}sen(\cos x).senx$

(Convocatoria junio 2003. Examen tipo A)

<u>SOLUCIÓN:</u>

$$f'(x)=\frac{2\cos(\cos x)(-sen(\cos x)).(-senx)}{4}=\frac{1}{2}.\cos(\cos x).sen(\cos x).senx$$

La opción C) es la correcta.

21. la derivada de $f(x)=\sqrt[3]{sen(x^3+2)}$ **es:**

A) $f'(x)=\dfrac{x^2(x^3+2)\cos(x^3+2)}{\sqrt[3]{sen^2(x^3+2)}}$

B) $f'(x)=\dfrac{x^2 c\,os(x^3+2)}{\sqrt[3]{sen^2(x^3+2)}}$

C) $f'(x)=\dfrac{1}{3}\sqrt{sen(x^3+2)}.(\cos(x^3+2)).(x^3+2)$

D) $f'(x)=\dfrac{3x^2 c\,os(x^3+2)}{2\sqrt[3]{sen^2(x^3+2)}}$

(Convocatoria junio 2003. Examen tipo J)

SOLUCIÓN:

$$f(x)=\sqrt[3]{sen(x^3+2)}=[sen(x^3+2)]^{\frac{1}{3}}$$
$$f'(x)=\frac{1}{3}[sen(x^3+2)]^{-\frac{2}{3}}.\cos(x^3+2).3x^2=\frac{1}{3}.\frac{1}{[sen(x^3+2)]^{\frac{2}{3}}}.\cos(x^3+2).3x^2=$$
$$=\frac{3x^2.\cos(x^3+2)}{3\sqrt[3]{[sen(x^3+2)]^2}}=\frac{x^2\cos(x^3+2)}{\sqrt[3]{sen^2(x^3+2)}}$$

La opción B) es la correcta.

22. Halla la derivada de $f(x)=sen^2(\cos(3x-1))$

SOLUCIÓN:

$$f(x)=sen^2(\cos(3x-1))=[sen(\cos(3x-1))]^2$$
$$f'(x)=2sen(\cos(3x-1)).[sen(\cos(3x-1))]'=2sen(\cos(3x-1)).\cos(\cos(3x-1)).[\cos(3x-1)]'=$$
$$=2sen(\cos(3x-1)).\cos(\cos(3x-1)).(-sen(3x-1).3)=$$
$$=-6sen(\cos(3x-1)).\cos(\cos(3x-1)).sen(3x-1)$$

23. La derivada de $f(x)=(2x^3+x).sen(2x^3+x)$ **es:**

A) $(6x^2+1)[sen(2x^3+x)+(2x^2+x)\cos(2x^3+x)]$

B) $(6x^2+1)^2 sen(2x^3+x)-(2x^2+x)\cos(2x^3+x)$

C) $(6x^2+1)^2 sen(2x^3+x)+(2x^2+x)\cos(2x^3+x)$

D) $(6x^2+1)^2 sen(2x^3+x)\cos(2x^3+x)$

(Convocatoria septiembre 2003. Examen tipo G)

SOLUCIÓN:

$$f'(x)=(6x^2+1).sen(2x^3+x)+\cos(2x^3+x).(6x^2+1).(2x^3+x)$$

Y sacando factor común a $(6x^2+1)$ queda:
$f'(x) = (6x^2+1)[sen(2x^3+x) + \cos(2x^3+x)(2x^3+x)]$ que es el resultado de la opción A).

La opción A) es la correcta.

24. El estudio de la función $f(x) = 3x^5 - 20x^4 + 30x^3 + 3$ permite afirmar que en el intervalo:

A) $(3,+\infty)$ **es convexa.**
B) $(0,3)$ **es cóncava.**
C) $(0,+\infty)$ **es cóncava**
D) $(-\infty,1)$ **es convexa.**

(Convocatoria septiembre 2003. Examen tipo G)

SOLUCIÓN:

Se halla la segunda derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante:

$f'(x) = 15x^4 - 80x^3 + 90x^2$

$f''(x) = 60x^3 - 240x^2 + 180x$

$$60x^3 - 240x^2 + 180x = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo la segunda ecuación, $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

Se obtienen los siguientes intervalos de concavidad y convexidad:
$(-\infty,0),\ (0,1),\ (1,3)\ y\ (3,+\infty)$
El único que coincide con los que se dan en las opciones es $(3,+\infty)$
Signo de la segunda derivada en dicho intervalo:
Si $f''(x) = 60x^3 - 240x^2 + 180x = 60x(x^2 - 4x + 3)$
Para x = 4, $f''(4) = 240(16 - 16 + 3) = 720 > 0$
Como la segunda derivada es positiva la función es convexa en el intervalo $(3,+\infty)$

La opción A) es la correcta.

25. La derivada de la función $f(x) = \dfrac{\log(x^2-2)}{e^{3x}}$ es:

A) $f'(x) = \dfrac{2x - 3(x^2-2)\log(x^2-2)}{(x^2-2)e^{3x}}$

B) $f'(x) = \dfrac{-9x^2 \log x - 6x - 1}{x^2 e^{3x}}$

C) $f'(x) = \dfrac{1 - 3x \log x}{xe^{3x}}$

D) $f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{9e^{3x}}$

(Convocatoria junio 2004. Examen tipo J)

SOLUCIÓN:

Si $f(x)=\dfrac{\log(x^2-2)}{e^{3x}}$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{2x}{x^2-2}e^{3x}-3e^{3x}\log(x^2-2)}{(e^{3x})^2}=\frac{\dfrac{2xe^{3x}-3e^{3x}(x^2-2)\log(x^2-2)}{x^2-2}}{e^{3x}e^{3x}}=$$

$$=\frac{e^{3x}[2x-3(x^2-2)\log(x^2-2)]}{e^{3x}e^{3x}(x^2-2)}=\frac{2x-3(x^2-2)\log(x^2-2)}{e^{3x}(x^2-2)}$$

La opción A) es la correcta.

26. El valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{xsenx}$ **es:**

A) $\dfrac{3}{2}$ **B)** $-\dfrac{2}{5}$ **C)** $-\dfrac{2}{3}$ **D)** $-\infty$

(Convocatoria septiembre 2004. Examen tipo D)

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{xsenx}=\frac{1-1^3}{0.0}=\frac{0}{0}\text{(Indeterminación)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{0-3\cos^2 x(-senx)}{1.senx+\cos x.x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x senx}{senx+x.\cos x}=\frac{0}{0}\text{(Indeterminación)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3[2\cos x(-senx).senx+\cos x.\cos^2 x]}{\cos x+1.\cos x+(-senx).x}=\frac{3(0+1)}{1+1+0}=\frac{3}{2}$$

(Hemos aplicado dos veces la regla de L`Hôpital)

La opción A) es la correcta.

27. La derivada de la función $f(x)=e^{-x}.\log(x+3)$ **es:**

A) $f'(x)=\dfrac{1}{x+3}-e^{-x}$ **B)** $f'(x)=-e^{-x}+\log 3+\dfrac{1}{x}$

C) $f'(x)=e^{-x-1}.\log(x+3)+e^{-x}.\dfrac{1}{x+3}$ **D)** $f'(x)=e^{-x}\left(\dfrac{1}{x+3}-\log(x+3)\right)$

(Convocatoria junio 2005. Examen tipo E)

SOLUCIÓN:

Si $f(x)=e^{-x}.\log(x+3)$, aplicando la fórmula de la derivada de un producto tenemos:

$f'(x)=-1.e^{-x}.\log(x+3)+\dfrac{1}{x+3}.e^{-x}=e^{-x}\left(\dfrac{1}{x+3}-\log(x+3)\right)$ resultado que coincide con el de la opción D).

La opción D) es la correcta.

28. La derivada segunda de $f(x)=2\cos^2 x$ es:

A) $f''(x)=-4senx\cos x$

B) $f''(x)=4(\cos^2 x+sen^2 x)$

C) $f''(x)=-4(\cos^2 x-sen^2 x)$

D) $f''(x)=4\cos x$

(Convocatoria septiembre 2005. Examen tipo C).

SOLUCIÓN:

Primera derivada:

$f'(x)=4\cos x.(-senx)=-4senx.\cos x$

Téngase en cuenta que $\boxed{\cos^2 x=(\cos x)^2}$

Segunda derivada:

$f''(x)=-4[\cos x.\cos x+(-senx).senx]=-4(\cos^2 x-sen^2 x)$

La opción C) es la correcta.

29. La derivada segunda de la función $f(x)=e^{\cos x}$ es:

A) $f''(x)=e^{\cos x}(sen^2 x-\cos x)$

B) $f''(x)=2e^{\cos x}(-senx)$

C) $f''(x)=e^{2\cos x}sen^2 x$

D) $f''(x)=-e^{\cos x-1}senx$

(Convocatoria septiembre 2005. Examen tipo F)

SOLUCIÓN:

Primera derivada:

$f'(x)=-senx.e^{\cos x}$

Segunda derivada:

$f''(x)=(-\cos x).e^{\cos x}+(-senx)e^{\cos x}.(-senx)=-\cos xe^{\cos x}+sen^2xe^{\cos x}=$

$=e^{\cos x}(sen^2 x-\cos x)$

La opción A) es la correcta.

30. La derivada de la función $f(x)=\sqrt[3]{tg2x}$ **es:**

A) $f'(x)=\dfrac{2(1+tg^2 2x)}{3\sqrt[3]{tg^2 2x}}$

B) $f'(x)=\dfrac{1+tg^2 2x}{3\sqrt[3]{tg^2 2x}}$

C $f'(x)=\dfrac{2(1+tg^2 2x)}{\sqrt[3]{tg^2 2x}}$

D) $f'(x)=6(1+tg2x)\sqrt[3]{tg^2 2x}$

<u>SOLUCIÓN:</u>

Expresamos la función en forma de potencia:

$$f(x)=\sqrt[3]{tg2x}=(tg2x)^{\frac{1}{3}}$$

Y ahora derivamos teniendo en cuenta que la derivada de la función tgx es $1+tg^2x$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(tg2x)^{-\frac{2}{3}}.(1+tg^2 2x).2=\frac{1}{3}.\frac{1}{(tg2x)^{\frac{2}{3}}}.2(1+tg^2 2x)=\frac{2(1+tg^2 2x)}{3\sqrt[3]{tg^2 2x}}$$

La opción A) es la correcta.

Se ha de tener en cuenta $\boxed{tg^2 2x=(tg2x)^2}$